

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

5. Folge, Band 42
Der ganzen Reihe 484. Band

Kuratorium:

W. Gerlach F. Paschen M. Planck
R. W. Pohl A. Sommerfeld

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin

Mit einem Bildnis von Walther Meißner,
einer Wiedergabe der Max Planck-Medaille
und 201 Abbildungen im Text

Reproduced and Distributed in the Public Interest by
THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

Lithoprinted by EDWARDS BROTHERS, INC., ANN ARBOR, MICHIGAN, U.S.A.

1 9 4 2

LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

137

ANNALEN DER PHYSIK

FÜNFTE FOLGE

BAND 42

⌈ This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited. ⌋

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

5. Folge, Band 42
Der ganzen Reihe 434. Band

Kuratorium:

W. Gerlach F. Paschen M. Planck
R. W. Pohl A. Sommerfeld

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin

Mit einem Bildnis von Walther Meißner,
einer Wiedergabe der Max Planck-Medaille
und 201 Abbildungen im Text

⌈ Reproduced and Distributed in the Public Interest by
THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN ⌋

I - 9 4 2

LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Lithoprinted by EDWARDS BROTHERS, INC., ANN ARBOR, MICHIGAN, U.S.A.

Alle Rechte vorbehalten
Printed in Germany

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig



⎓ This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited. ⎓

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 42 • HEFT 1 • 1942

Durchgang langsamer Kaliumionen durch Gase von niederem Druck¹⁾

Von H. Pöeverlein

(Mit 15 Abbildungen)

Inhalt: I. Ionenquelle. Düse des Atomstrahlrofens. — II. Intensitätsabnahme von Kaliumionenstrahlen (12–200 Volt Geschwindigkeit) in Argon. Wirkungsquerschnitt. — III. Geschwindigkeitsverteilung der Kaliumionen (350 Volt Anfangsgeschwindigkeit) nach dem Durchgang durch He, Ar, Kr und N₂: 1. Bisher bekanntes über Ionisation durch langsame Ionenstrahlen und Ziel der vorliegenden Messungen; 2. Frühere Beobachtungen von Geschwindigkeitsverlusten langsamer Ionen in Gasen; 3. Versuchsprinzip; 4. Einzelheiten der Versuchsanordnung; 5. Ergebnisse; 6. Diskussion; Folgerungen. — IV. Zusammenfassung. — V. Literatur.

I. Ionenquelle

Die K⁺-Ionenstrahlen wurden durch Oberflächenionisation erzeugt. Hierzu diente eine Apparatur, die im wesentlichen früher beschrieben^{(3)²⁾}, inzwischen aber noch verbessert worden ist. In ihr treffen Kaliumatomstrahlen, die aus einem kleinen Atomstrahlrofen kommen; auf eine glühende Wolframfolie. An der Wolframoberfläche werden die meisten auftreffenden Kaliumatome ionisiert. Die Folie hat positives Potential, so daß die entstandenen Ionen zur gegenüberliegenden Elektrode hin beschleunigt werden. Man erhält so Ionenstrahlen von sehr einheitlicher Geschwindigkeit.

Verbessert wurde hauptsächlich der Atomstrahlrofen: An die Stelle seiner schlitzförmigen Blendenöffnung trat eine Düse, durch die die Kaliumatome vorzugsweise in axialer Richtung herausfliegen. Hierdurch erreicht ein größerer Bruchteil der Atome die Wolframfolie.

Vor der Beschreibung der Düse und der Erläuterung ihrer Wirkungsweise seien noch die weiteren Änderungen genannt, die die Apparatur erfahren hat. Der Atomstrahlrofen wurde gegen Wärmeabgabe besser geschützt. Die zweite Heizwicklung, die nur Wärmeverluste ausgleichen sollte, war dadurch überflüssig. Das Kupferrohr, das die vom Ofen auf die Wände zu fliegenden Atome abfing, wurde weggelassen, da es bei starkem Kaliumbeschlag zu kleine Öffnung

1) D 91.

2) Die Ziffern in Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

⎓ Reproduced and Distributed in the Public Interest by
THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN ⎓

hatte und so die Atomstrahlintensität wesentlich herabsetzte. Die vor der Glühfolie liegende Atomstrahlblende mußte wegen des großen Austrittsquerschnitts der Ofendüse breiter gemacht werden. Die Glühfolie wurde zur Homogenisierung des elektrischen Feldes von einer ebenen Schutzelektrode umgeben. Die Form der der Folie gegenüberliegenden Elektrode blieb unverändert. Der Blendenschlitz wurde jedoch durch einen Kanal ersetzt, durch den die Ionenstrahlen in das Gas gelangen. Die weiteren Blenden, die ursprünglich noch eingesetzt waren, fielen weg.

Düse des Atomstrahlrofens

Die Düse, durch welche Atome des im Ofen vorhandenen Kaliumdampfs ins Vakuum austreten, ist ein Eiseneinsatz mit einer Anzahl kleiner zylindrischer Kanäle (Abb. 1).

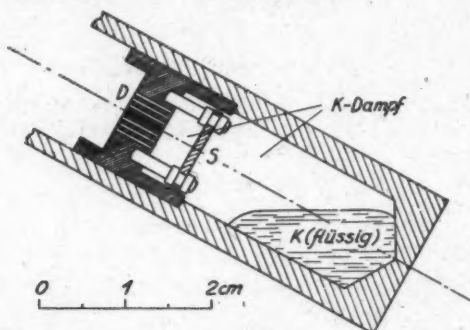


Abb. 1. Atomstrahlrofen (ohne Heizwicklung und Wärmeisolierung)
D Düse (34 Kanäle), S ovale Scheibe zum Schutz der Düse
vor spritzendem Kalium

Ein Kanal läßt die Atome vorzugsweise in Achsenrichtung herauskommen, wenn die mittlere freie Weglänge der Atome groß gegen den Kanaldurchmesser ist. Ein einzelner Kanal gibt also günstige Richtwirkung bei niedrigem Kaliumdampfdruck, d. h. bei kleiner (praktisch nicht ausreichender) Atomstrahlintensität. Die Atomstrahlintensität kann man unter Erhaltung der Richtwirkung erhöhen, wenn man statt eines Kanals viele parallele Kanäle verwendet.

Wie die Richtwirkung und die bei dieser Richtwirkung erzielbare Intensität¹⁾ von der Dimensionierung der Düse abhängen, läßt sich mittels der für Molekularströmung geltenden Beziehungen (1), (2) ungefähr angeben.

1) Als Maß der Atomstrahlintensität, die die Folie trifft, kann man die Stromstärke nehmen, die man bei vollständiger Ionisierung erhalten würde.

Zu diesem Zweck seien folgende Größen und Zahlenwerte eingeführt:

Ausmaße der Düse und der Apparatur

n	Anzahl der Kanäle,
r	Radius des einzelnen Kanals,
l	Länge der Kanäle,
$\omega_F = 2,2 \cdot 10^{-3}$	Raumwinkel, unter dem die von Atomstrahlen beschossene Foliensfläche ($0,3 \times 1,4 \text{ cm}^2$) von der Düse aus erscheint.

Zustandsgrößen und Konstanten des Kaliumdampfs im Ofen

ρ	Dichte,
500° K	absolute Temperatur,
$\lambda = 1,11 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{\rho}$	mittlere freie Weglänge. Da der Zahlenfaktor für Kalium unbekannt ist, wurde willkürlich der für Argon eingesetzt [berechnet aus dem Wert von λ unter Normalbedingungen (5)].
$M = 39,1$	Molekulargewicht.

Faraday-Konstante

$$F = 96494 \text{ Coulomb.}$$

Zunächst soll die Kaliummenge berechnet werden, die in einer Sekunde die Folie erreicht.

Die Anzahl der Atome, die sekundlich vom Ofeninnern her kommend in die Kanäleingänge eintreten, ist dieselbe wie die Anzahl derer, die auf eine Wand von der Fläche der Kanäleingänge ($n r^2 \pi$) pro Sekunde auftreffen — vorausgesetzt, daß die mittlere freie Weglänge im Ofen groß gegen den Kanaldurchmesser ist —. Ihre Masse ist demnach¹⁾

$$1,30 \cdot 10^4 \cdot n r^2 \pi \cdot \rho.$$

Hier interessieren von den in die Kanäle eintretenden Atomen nur die, deren Flugrichtung in einem kleinen Raumwinkel ω um die Achse liegt; das ist ein Bruchteil

$$\frac{\omega}{\pi}$$

mit der Masse

$$m_\omega = 1,30 \cdot 10^4 \cdot n r^2 \pi \cdot \rho \cdot \frac{\omega}{\pi}.$$

1) Vgl. z. B. (2). Die Zahlenwerte für das Molekulargewicht und die Temperatur sind in allen Formeln bereits eingesetzt. Zahlenfaktoren sind, soweit nichts anderes vermerkt, in CGS-Einheiten angegeben.

Ist die mittlere freie Weglänge im Ofen groß gegen die Länge der Kanäle, dann fliegen diese Atome ungehindert durch die Kanäle hindurch. Die Masse der aus den Kanälen sekundlich ins Vakuum austretenden Atome, die eine im Raumwinkel ω liegende Flugrichtung haben, ist dann ebenfalls m_ω . Setzt man für ω den von der Glühfolie erfaßten Raumwinkel (ω_F) ein, so erhält man die zur Folie in der Sekunde gelangende Kaliummenge

$$m_F = 1,30 \cdot 10^4 \cdot n r^2 \pi \cdot \varrho \cdot \frac{\omega_F}{\pi} \\ = 28,6 \cdot n r^2 \cdot \varrho.$$

Die gesamte aus der Düse pro Sekunde austretende Kaliummenge ist auch leicht zu berechnen. Die sekundlich durch einen Kanal strömende Menge wird durch die Molekularströmungsformel (1) angegeben zu

$$1,09 \cdot 10^5 \cdot \frac{r^3}{l} \cdot \varrho.$$

Durch die n Kanäle der Düse tritt n mal so viel aus, das ist

$$m = 1,09 \cdot 10^5 \cdot n \frac{r^3}{l} \cdot \varrho.$$

Das Verhältnis der die Folie treffenden Menge zur gesamten austretenden Menge kann als Maß für die Richtwirkung oder als Wirkungsgrad der Düse gelten:

$$\eta = \frac{m_F}{m} = 2,62 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{l}{r}.$$

Vorausgesetzt wurde, daß die mittlere freie Weglänge (λ) im Ofen groß ist im Vergleich zur Kanallänge (l). Ist die Weglänge dagegen klein, so kommen die aus den Kanälen zur Glühfolie fliegenden Atome nicht unmittelbar aus dem Ofeninnern, sondern sie haben Stöße in den Kanälen ausgeführt. Für die Richtwirkung der Düse ist in diesem Fall nur das letzte Stück der Kanäle maßgebend, das ohne Stöße durchlaufen wird. Der Wirkungsgrad ist dann schlechter.

Als Gültigkeitsgrenze der für den Wirkungsgrad abgeleiteten Formel kann man ungefähr

$$\lambda = l$$

annehmen. In diesem Grenzfall ist die Dampfdichte im Ofen (Beziehung zwischen λ und ϱ vgl. S. 3)

$$\varrho = \frac{1,11 \cdot 10^{-8}}{\lambda} = \frac{1,11 \cdot 10^{-8}}{l},$$

die zur Folie in der Sekunde kommende Kaliummenge demnach

$$m_F = 28,6 \cdot n r^2 \cdot \frac{1,11 \cdot 10^{-3}}{l} \quad 1)$$

und der Ionenstrom in Ampere, falls diese Menge restlos ionisiert wird,

$$J = m_F \cdot \frac{F}{M} = \frac{28,6 \cdot 1,11 \cdot 10^{-3} \cdot 96494}{39,1} \cdot \frac{n r^2}{l}$$

$$J = 7,84 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{n r^2}{l}$$

Dies ist also ungefähr die Grenzstromstärke, oberhalb derer der Wirkungsgrad abnimmt.

In der Praxis ist die für das Kanalsystem zur Verfügung stehende Fläche begrenzt und dadurch die Summe der Kanalquerschnitte festgelegt auf einen Wert f :

$$n r^2 \pi = f.$$

Wird außerdem ein bestimmter Wirkungsgrad (η) vorgeschrieben, dann folgt aus den für η und J gefundenen Ausdrücken

$$\frac{r}{l} = \frac{2,62 \cdot 10^{-4}}{\eta},$$

$$J = 7,84 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{f}{\pi}} \cdot \frac{2,62 \cdot 10^{-4}}{\eta} \cdot \sqrt{n}.$$

Die Grenzstromstärke ist demnach unter den angegebenen Voraussetzungen proportional \sqrt{n} . Man wird daher die Anzahl n der Kanäle möglichst groß, den Kanalradius möglichst klein machen.

Die Daten der verwendeten Düse sind:

Fläche, auf der das Kanalsystem untergebracht ist, $0,21 \text{ cm}^2$,

$$n = 34,$$

$$r = 0,02 \text{ cm},$$

$$l = 0,4 \text{ cm}.$$

Hieraus errechnet sich der Wirkungsgrad

$$\eta = 5,2 \cdot 10^{-3}$$

und die Grenzstromstärke

$$J = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ Amp.},$$

1) Genau genommen wäre hier die Temperaturabhängigkeit von m_F zu beachten. Die gewünschte Dampfdichte stellt man ja durch Wahl der Ofentemperatur ein. Man müßte daher in m_F die Temperatur als Funktion der Dichte und damit der Kanallänge l angeben. Da jedoch der Sättigungsdampfdruck sehr stark von der Temperatur abhängt, ist umgekehrt die Temperatur vom Dampfdruck bzw. der Dichte nur sehr wenig abhängig, so daß man sie näherungsweise als konstant ansehen kann.

die bei einer Dampfdichte

$$\rho = \frac{1,11 \cdot 10^{-3}}{l} = 2,78 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

erreicht wird. Diese Dichte entspricht einem Dampfdruck von $2,2 \cdot 10^{-3}$ mm Hg, der sich ungefähr bei der vorausgesetzten Temperatur von $500^\circ \text{K} = 230^\circ \text{C}$ als Sättigungsdruck einstellt. Daß nur so niedrige Temperatur erforderlich ist, ist ein weiterer Vorzug der Düse. 1 g Kalium, d. i. etwa eine Ofenfüllung, ergibt bei dem errechneten Wirkungsgrad $3,6 \cdot 10^{-3}$ Amp.-Std. Für die früher benutzte Ofenblende findet man einen 7mal schlechteren Wirkungsgrad ($\eta = \frac{a \cdot r}{\pi} = 7,0 \cdot 10^{-4}$).

Die Versuche zeigen die bedeutende Erhöhung der Ampere-stundenzahl und bestätigen roh die theoretisch ermittelten Zahlen. Genaue Messungen darüber wurden nicht ausgeführt.

Bei den Versuchen mit Gasen war nicht die ganze Ionenstrahlintensität verwendbar. Der Kanal, der den mit Gas gefüllten Raum von der Ionenquelle trennt, läßt nur einen Teil des Stroms durch. Außerdem war der Gasdruck vor dem Kanal meist so hoch, daß die Atom- und Ionenstrahlen geschwächt wurden.

Der Ofen wurde mit einer Kaliumfüllung viele Male in Betrieb genommen. Er wurde jedesmal langsam angeheizt, damit das Kalium nicht spritzte, und auch nur allmählich abgekühlt, damit die Düse ebenso wie im Betrieb etwas wärmer als der übrige Ofen war und so vor Verstopfen bewahrt wurde. Wenn abwechselnd mit sehr verschiedenen Ofentemperaturen gearbeitet wurde oder die Temperatur wesentlich über 230°C lag, stieg die Ionenemission gelegentlich rasch sehr stark an, offensichtlich dadurch, daß Kaliumniederschläge in dem an den Ofen anschließenden Rohr schmolzen und zum Ofen hinliefen. Als Betriebstemperatur des Ofens wurde daher bei den späteren Versuchen immer etwa 230°C gewählt. Kleine Emissionsänderungen wurden meist durch geringes Ändern der Ofentemperatur ausgeglichen.

II. Intensitätsabnahme von Kaliumionenstrahlen (12–200 Volt Geschwindigkeit) in Argon. Wirkungsquerschnitt

Mit der in Abb. 2 dargestellten Apparatur wurde die Intensitätsabnahme von Kaliumionenstrahlen in Argon untersucht.

Die Kaliumionenstrahlen gelangen durch einen zylindrischen Kanal (K) von 2 mm Durchmesser und 12 mm Länge in den mit Argon von niedrigem Druck gefüllten Raum. Mittels eines Schiffs

kann in den Strahlengang unmittelbar hinter dem Kanal ein Auffänger (Messingplatte, A_1) eingeführt werden, der den gesamten in das Gas eintretenden Ionenstrom zu messen gestattet. Die durch das Gas geschwächten Ionenstrahlen treffen auf einen zweiten Auffänger (A_2), der durch eine Blende mit einer Öffnung von 4 mm Durchmesser abgedeckt ist.

Argon¹⁾ strömt aus einem Vorratsgefäß durch ein mit flüssiger Luft gekühltes Rohr und ein regulierbares Nadelventil in die Apparatur ein. Über dem Kanal wird laufend abgepumpt.

Die Auffängerströme, die 10^{-11} bis $3 \cdot 10^{-7}$ Amp. betragen, lassen sich mit einem Spiegelgalvanometer messen.

Das Verhältnis der beiden Auffängerströme $\frac{J_2}{J_1}$ (J_1 = Strom auf A_1 , J_2 = Strom auf A_2) wurde bei verschiedenen Ionen- geschwindigkeiten und Gasdrucken bestimmt. Im Vakuum sollte es eins sein, ist aber in Wirklichkeit kleiner (0,7–0,8), da die Ionenstrahlen ein wenig diffus sind. Es mußte daher korrigiert werden nach der Formel

$$\left(\frac{J_2}{J_1}\right)_{\text{kor.}} = \left(\frac{J_2}{J_1}\right) : \left(\frac{J_2}{J_1}\right)_{\text{vak.}}$$

Das Stromverhältnis im Vakuum $\left(\frac{J_2}{J_1}\right)_{\text{vak.}}$ wurde hierin für die gleiche Ionengeschwindigkeit und ungefähr die gleiche Eingangstromstärke J_1 genommen wie $\frac{J_2}{J_1}$, da es von der Ionengeschwindigkeit und etwas auch von J_1 abhängt. Da die letztere Abhängigkeit bei größeren Stromstärken stärker wird, wurde vorzugsweise mit kleineren Stromstärken gearbeitet.

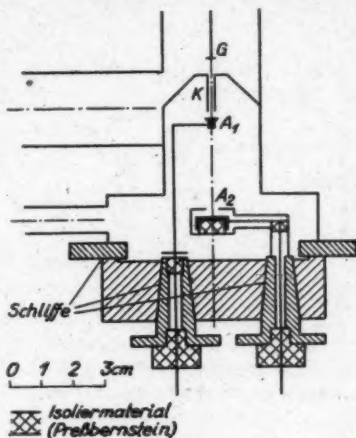


Abb. 2. Apparatur zur Messung der Intensitätsabnahme (Ionenquelle nur angedeutet)
G Glüh-anode, K Kanal, A_1 , A_2 Auffänger

1) Argon in Stahlflasche von der Gesellschaft für Linde's Eismaschinen A.-G.; enthält etwa 2% Verunreinigungen (vorwiegend Stickstoff).

Das korrigierte Verhältnis der beiden Auffängerströme ist in Abb. 3 in logarithmischem Maßstab als Funktion des Druckes p aufgetragen. Für niedrige Drücke gilt das Exponentialgesetz (Gerade in Abb. 3)

$$\left(\frac{J_2}{J_1}\right)_{\text{kor.}} = e^{-Qlp},$$

wo l den durchlaufenen Weg (3,1 cm) bedeutet und Q den Wirkungsquerschnitt der Volumeneinheit bei 1 mm Hg (vom Bremsquerschnitt abgesehen). Der ist zu vernachlässigen; vgl. S. 30). Bei höheren Drücken wird die Intensitätsabnahme langsamer, da immer häufiger Ionen, die bereits aus dem Strahlenbündel herausgestreut waren, durch weitere Stöße doch noch den Auffänger erreichen.

Abb. 3. Intensitätsabnahme von Kaliumionenstrahlen in Argon. (Korrigiertes Verhältnis der beiden Auffängerströme in Abhängigkeit vom Druck bei verschiedenen Ionen- geschwindigkeiten)

Der Wirkungsquerschnitt Q für verschiedene Ionengeschwindigkeiten wurde aus der Anfangsneigung der Kurven von Abb. 3 und einiger weiterer dort nicht eingezeichneter Kurven errechnet und auf 0° C reduziert. Abb. 4 zeigt die Ergebnisse neben denen anderer

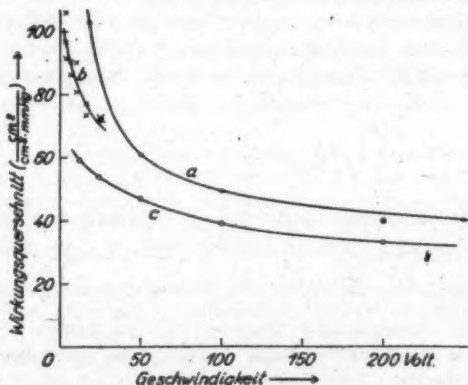


Abb. 4. Wirkungsquerschnitt K^+-Ar
a Durbin (4), b Ramsauer und Beeck (6),
© O. Schmidt (7), c vorliegende Messung

Autoren¹⁾. Die Übereinstimmung ist zufriedenstellend, wenn man bedenkt, daß die vorliegenden Messungen ohne Magnetfeld, die der anderen Autoren dagegen auf einer Kreisbahn im Magnetfeld durchgeführt wurden, und daß ferner verschieden scharfe Ausblendung von Einfluß sein kann.

III. Geschwindigkeitsverteilung der Kaliumionen
(350 Volt Anfangsgeschwindigkeit) nach dem Durchgang
durch He, Ar, Kr und N,

1. Bisher bekanntes über Ionisation durch langsame Ionenstrahlen²⁾
und Ziel der vorliegenden Messungen

Beobachtungen über Ionisation

Wenn Ionen gegen Atome oder Moleküle stoßen, treten neben elastischer Streuung folgende Prozesse ein: Umladung, Ionisation, Anregung und Dissoziation. Speziell beim Stoß langsamer Alkaliionen ist Umladung sehr selten, wie aus einigen Messungen [F. Wolf (50)] und dem für Umladung gültigen Resonanzprinzip [vgl. z. B. (50)] folgt. Ionisation durch langsame Alkaliionenstrahlen dagegen wurde in verschiedenen Fällen mit nennenswerter Ausbeute beobachtet. Hier soll nur von der Ionisation (ohne gleichzeitige Neutralisation des stoßenden Ions) die Rede sein.

In zahlreichen experimentellen Arbeiten [(8)—(21), weitere in (52) angegeben] wurde die Ionisierung durch langsame Ionenstrahlen untersucht und vor allem die Ionisierungsfunktion gewisser Ionen in verschiedenen Gasen gemessen. Der typische Verlauf der Ionisierungsfunktion, der sich dabei fast immer ergab, ist folgender (Abb. 5): Bei einem bestimmten Einsatzipotential scharfes Einsetzen [in manchen Messungen genauer beobachtet als in Abb. 5, besonders in (18), (19)], mit wachsender Ionengeschwindigkeit zunächst rascher, später lang-

1) Durbin (4) teilt leider nicht die Wirkungsquerschnitte unmittelbar mit, sondern nur das Verhältnis der freien Weglänge K^+-Ar zur gaskinetischen $Ar-Ar$. Hieraus wurden die Wirkungsquerschnitte berechnet, wobei für die gaskinetische freie Weglänge der Wert aus den Landolt-Börnstein-Tabellen (5) eingesetzt wurde ($6,35 \cdot 10^{-6}$ cm bei 760 mm Hg und $0^\circ C$).

An einigen Literaturstellen (52), (53), (54) sind die Durbinschen Ergebnisse viel niedriger als die Ramsauer-Beeckschen angegeben, auch für andere Gase als Argon. Offensichtlich liegt da eine Umrechnung mit zu hohen Werten der gaskinetischen Weglänge zugrunde. Das sieht man deutlich bei He und N_2 . Für diese Gase zeigt nämlich Durbin die gemessene Abnahme der Ionenstrahlintensität. Daraus sind aber andere Wirkungsquerschnitte zu errechnen als die zitierten. Dagegen führt hier die Umrechnung mit den in (5) zusammengestellten gaskinetischen Weglängen zu den richtigen Werten.

2) Das hier Gesagte gilt größtenteils auch für Atomstrahlen.

samer Anstieg. Die Zahlenwerte der Ionisierungsfunktion sind meist wesentlich kleiner als die für Elektronen der gleichen Energie.

Die Einsatzpotentiale liegen viel höher als die Ionisationspotentiale, die man von optischen Beobachtungen oder von Ionisation durch Elektronen her kennt. Sie lassen mit diesen auch keinen einfachen Zusammenhang erkennen. Für die Einsatzpotentiale der

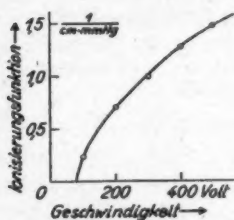


Abb. 5. Ionisierungsfunktion für Kaliumionenstrahlen in Argon
[nach Nordmeyer (14)]

Alkaliionen in Edelgasen fanden Beeck und Mouzon (8) sowie Varney (18) gewisse Gesetzmäßigkeiten. Die auffallendste davon ist: Das Einsatzpotential in einem Edelgas ist (mit einer einzigen Ausnahme) am niedrigsten für dasjenige Alkaliion, das im periodischen System dem Edelgas benachbart steht. Dieses Alkaliion liefert von allen bei gleicher kinetischer Energie auch die höchsten Werte der Ionisierungsfunktion. Bezüglich weiterer Regeln über die Ionisierung durch Ionenstoß sei auf die Literatur verwiesen.

Die Elektronen, die bei der Ionisation durch Stoß langsamer Ionen frei werden, haben höchstens wenige Volt Geschwindigkeit, wie die niedrigen Auffängerspannungen beweisen, die zur Sättigung des aufgefangenen Elektronenstroms ausreichen [z. B. 2 Volt bei Nordmeyer (14)].

Über die Geschwindigkeit der erzeugten Ionen ist nur wenig bekannt. Frische (12) fand im Fall K^+-Hg die Geschwindigkeitskomponente in Strahlrichtung vorwiegend unter 3 Volt liegend. Varney (18), (19) weist die neu entstandenen Ionen mit einer Methode nach, die besonders für langsame Ionen empfindlich ist. Seine Messungen beweisen aber nicht, daß die Geschwindigkeit der erzeugten Ionen klein ist [Rostagni (17), Varney (20)]. Nach Rostagnis Beobachtungen (15) kommen bei Argonatomstrahlen in Argon größere Sekundärionengeschwindigkeiten vor.

Die Untersuchungen der *Umladung* ergaben im Gegensatz dazu übereinstimmend, daß die durch diesen Prozeß gebildeten Ionen praktisch geschwindigkeitslos sind [vgl. z. B. (43), (44), (49)]. Ebenso liefert die Ionisation durch *rasche* Ionenstrahlen (Kanalstrahlen) Ionen ohne merkliche Geschwindigkeit [vgl. z. B. (39)].

Theoretische Überlegungen

Eine Erklärung wird gesucht für den Verlauf der Ionisierungsfunktion, insbesondere für die Einsatzpotentiale und die Gesetzmäßig-

keiten, die diese in ihrer Abhängigkeit von den beiden Stoßpartnern zeigen.

Aus dem Impulssatz folgt [Joos und Kulenkampff (23)], daß nur ein Teil der kinetischen Energie des stoßenden Ions zu Ionisierung (oder Anregung) verwendet werden kann. Der umsetzbare Bruchteil der kinetischen Energie ist $\frac{M}{m+M}$, wenn m die Masse des stoßenden, M die des gestoßenen Teilchens bedeutet. Die zur Ionisation erforderliche Mindestenergie des stoßenden Teilchens ist daher nicht gleich dem Ionisationspotential E , sondern $\frac{m+M}{M}$ mal größer; sie beträgt $\frac{m+M}{M} E$. Die beobachteten Einsatzpotentiale

liegen noch über diesen Werten. Beispielsweise läßt der Impulssatz Ionisation von Argon durch Kaliumionen ($m = M$) vom doppelten Wert des Ionisationspotentials, das ist von 31,4 Volt ab zu [Ionisationspotential 15,7 Volt (41)]. Nach den Messungen (18) ist das Einsatzpotential aber 82 Volt. Mit dem Impulssatz allein sind also die hohen Einsatzpotentiale noch nicht zu erklären. Doch kann man schon mit mechanischen Vorstellungen vom Stoß weiterkommen [Joos und Kulenkampff (23), Zwicky (25), Döpel (22)].

Zwicky (25) nimmt an, daß Ionisation dann eintritt, wenn die elastische Welle, die in dem gestoßenen Atom hervorgerufen wird, eine gewisse Größe überschreitet; und zwar soll die Energie, die durch die elastische Welle einem Elektron zugeführt werden kann, größer sein als das Ionisationspotential des Moleküls, das die beiden Stoßpartner im Augenblick ihrer größten Annäherung miteinander bilden. Aus dieser Bedingung erhält man unter plausibeln Annahmen die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten der Einsatzpotentiale. Wie die genauen Vorgänge in den Atomen sind, ist aus der Zwicky'schen Theorie nicht zu sehen.

Nach einer wellenmechanischen Theorie des Ionenstoßes von Massey und Smith (24) sollen Anregungs- und Ionisierungsfunktionen bei kleiner kinetischer Energie des stoßenden Ions vernachlässigbar klein sein und erst bei einer gewissen kinetischen Energie, der sogenannten Aktivierungsenergie¹⁾, auf größere Werte ansteigen (scheinbares Einsetzen der Anregung bei dieser Energie). Der ungefähre Verlauf gemessener Anregungsfunktionen stimmt mit dem theoretisch gefundenen überein. Schwache Anregung unterhalb des starken An-

1) Massey und Smith geben die kinetische Energie für ein Bezugssystem an, das sich mit dem Schwerpunkt der beiden Teilchen bewegt, während hier ein ruhendes Bezugssystem benutzt ist. Es ist zu beachten, daß die Aktivierungsenergie in beiden Bezugssystemen verschieden ist.

stiegs der Anregungsfunktion konnte Maurer (55) tatsächlich beobachten.

Es ist denkbar, daß die beobachteten Einsatzzpotentiale für Ionisierung in Wirklichkeit Aktivierungsenergien darstellen, daß also bei ihnen die Ionisierung nicht einsetzt, sondern von kleinen Werten ausgehend sehr stark ansteigt. Der Ausdruck, den Massey und Smith für die Aktivierungsenergie¹⁾ ableiten, gibt aber die Gesetzmäßigkeiten der Einsatzzpotentiale für Ionisation von Edelgasen durch Alkaliionen nicht richtig wieder.

Zu erwägen ist noch folgende Möglichkeit: Die Ionisation, die beim Ionenstoß beobachtet wird, kann eine Ionisation mit gleichzeitiger Anregung oder mehrfache Ionisation sein. Hierin könnte ebenfalls ein Grund für die Höhe der Einsatzzpotentiale liegen. Vielleicht treten bei verschiedenen Kombinationen von Alkaliionen mit Edelgasatomen verschiedene derartige Prozesse ein entsprechend der Gesetzmäßigkeit der Einsatzzpotentiale.

Ziel der vorliegenden Messungen

Da die Ionisation durch Ionenstoß theoretisch noch nicht völlig erforscht ist, sind weitere Beobachtungen wünschenswert. Die Frage, ob einfache Ionisation oder etwa Ionisation mit gleichzeitiger Anregung oder mehrfache Ionisation eintritt, wäre zu beantworten durch Messung des Energieverlusts, den das stoßende Ion bei dem fraglichen Prozeß erleidet.

Es wurde die Geschwindigkeitsverteilung von Kaliumionen nach dem Durchgang durch Gase untersucht, da es möglich schien, hierbei Energieverluste durch Ionisationsstöße oder vielleicht auch durch andere unelastische Stöße aufzufinden.

2. Frühere Beobachtungen von Geschwindigkeitsverlusten langsamer Ionen in Gasen

Verschiedene Forscher (7), (36), (37), (47) machten summarische Beobachtungen über Energieverluste langsamer Ionenstrahlen in Gasen, ohne mit ihrer Versuchsmethode die Geschwindigkeitsverteilung messen zu können. Bei den festgestellten Energieverlusten handelt es sich — wenigstens in manchen Fällen — einfach um Abgabe von kinetischer Energie durch elastische Streuung²⁾. Diese

1) Vgl. Fußnote 1) S. 11.

2) O. Schmidt (7) sucht die von elastischem Stoß herrührenden Energieverluste rechnerisch zu kompensieren. Das ist aber sicher nicht immer exakt möglich, da das genaue Streugesetz unbekannt ist. In einigen Fällen dürften auch nach der rechnerischen Kompensation noch unelastische Energieverluste übriggeblieben sein.

kann sich besonders bemerkbar machen, wenn schwere Ionen gegen leichte Atome oder Moleküle stoßen.

Geschwindigkeitsmessungen an gestreuten Ionen nach der Gegenfeldmethode [z. B. (45)] ließen immer nur die Geschwindigkeiten erkennen, die bei elastischem Stoß zu erwarten sind. Die Gegenfeldmethode ist ja für etwas langsamere Ionen ziemlich unempfindlich.

Arnot und Mitarbeiter (35) beobachteten rasche Hg^+ - bzw. Ar^+ -Ionen, die durch Umladung von Hg^{++} - oder Ar^{++} -Strahlen im eigenen Gas entstehen, und bestimmten deren Geschwindigkeitskomponente in der ursprünglichen Strahlrichtung. Sie fanden eine Abweichung dieser Geschwindigkeitskomponente von der Anfangsgeschwindigkeit. Inwieweit die Abweichung auf Änderung des Betrages der Geschwindigkeit zurückzuführen ist und inwieweit auf Richtungsänderung, läßt sich nicht sicher sagen.

Eindeutige Ergebnisse über die bei unelastischen Stößen auftretenden Geschwindigkeits- und Richtungsänderungen der stoßenden Ionen liegen noch nicht vor.

3. Versuchsprinzip

Das Verfahren, nach dem die Geschwindigkeitsverteilung gestreuter Ionen hier gemessen wird, ist eines, das bei Elektronen in ähnlicher Weise schon wiederholt zur Beobachtung von Geschwindigkeitsverlusten durch Anregung und Ionisation verwendet wurde [vgl. z. B. (46)].

Durch einen Kanal treten Kaliumionenstrahlen von einheitlicher Geschwindigkeit in das Gas ein. Ionen, die beim Stoß gegen Gas-moleküle gestreut werden, können durch Blenden in den Geschwindigkeitsanalysator gelangen. Dieser besteht aus einem Ablenk-kondensator mit einem dahinterliegenden Auffänger. Die Volt-geschwindigkeit der Ionen, die durch den Kondensator hindurch den Auffänger erreichen, ist der Kondensatorspannung proportional. Durch Messung des Auffängerstroms in Abhängigkeit von der Kondensatorspannung erhält man die gesuchte Geschwindigkeits-verteilung¹⁾.

Bei den Versuchen mit Ionenstrahlen ergeben sich gegenüber Elektronenstrahlen neben der umständlicheren Herstellung und geringeren Intensität der Ionenstrahlen folgende Schwierigkeiten:

1) Bei den späteren Messungen waren außer dem Ablenkfeld noch weitere elektrische Felder im Geschwindigkeitsanalysator vorhanden und das Meß-verfahren gegenüber dem hier beschriebenen prinzipiellen abgeändert. Vgl. hierüber S. 19.

1. Die Ionisations- oder Anregungsausbeute ist kleiner als bei Elektronenstrahlen gleicher Energie.

2. Die Ionen erfahren auch bei elastischem Stoß nach Energie- und Impulssatz einen Geschwindigkeitsverlust, da ihre Masse mit der des gestoßenen Teilchens vergleichbar ist. Der Betrag dieses Geschwindigkeitsverlusts hängt vom Streuwinkel ab. Man muß daher Ionen eines bestimmten Streuwinkels ausblenden, um nicht von vornherein alle möglichen Geschwindigkeiten zu erhalten.

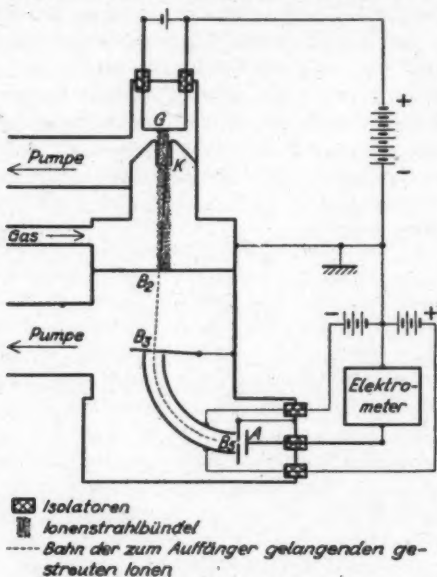


Abb. 6. Versuchsanordnung, vereinfacht
 G Glühnode, K Kanal, B_1 , B_2 , B_3 Blenden, A Auffänger

3. Ein Ion, das zwei oder mehr elastische Stöße ausführt, erlangt im allgemeinen andere Geschwindigkeit als eines, das bei einmaligem elastischem Stoß dieselbe Flugrichtung einschlägt (vgl. auch S. 25). Mehrmalige Stöße sind deshalb durch Wahl niedrigen Gasdrucks möglichst auszuschließen.

Abb. 6 zeigt die Versuchsanordnung, etwas vereinfacht. Die Apparatur besteht fast ausschließlich aus Messing. Der Raum, in dem die Ionen erzeugt und beschleunigt werden, sowie der Raum, der den Geschwindigkeitsanalysator enthält, werden laufend ausgepumpt. Zwischen beiden liegt der gasgefüllte Raum mit einem

Druck von größenordnungsmäßig 10^{-2} mm Hg. Durch die Blende B_1 gelangen gestreute Ionen aus dem gasgefüllten Raum ins Vakuum. Die Blenden B_1 und B_2 zusammen bestimmen die Streurichtung, die erfaßt werden soll. Der auf B_2 folgende Ablenkkondensator ist ein Zylinderkondensator — seine Platten sind Teile zweier konzentrischer Kreiszylinder — (Näheres darüber S. 17). Die Potentiale der beiden Ablenkplatten liegen symmetrisch gegen das Gehäuse. Die Blende, die den Kondensator abschließt, (B_3) läßt nur die Ionen, deren Geschwindigkeit der jeweiligen Ablenkspannung entspricht, durchtreten und den Auffänger (A) treffen. Der Auffängerstrom wird mit einem Elektrometer nach der Auflademethode gemessen.

In den Geschwindigkeitsanalysator können nur Ionen kommen, die nach Streuung im Gas auf der verlängerten Verbindungslinie $B_1 B_2$ (gestrichelte Linie in Abb. 6) weiterfliegen. Damit dies möglichst viele Ionen sind, soll ein recht großes Stück der verlängerten Linie $B_1 B_2$ innerhalb des Ionenstrahlbündels im gasgefüllten Raum verlaufen. Aus diesem Grund wird erstens ein sehr ausgedehntes Ionenstrahlbündel in das Gas eingelassen (rechteckiger Querschnitt des Kanals 1×6 mm²) und zweitens das Blendensystem $B_1 B_2$ auf eine Streurichtung eingestellt, die nur wenig gegen die ursprüngliche Strahlrichtung geneigt ist.

Weitere Gründe für diese Wahl der Streurichtung sind: Es wurde vermutet, daß beim Ionisationsstoß kleine Streuwinkel bevorzugt sind, da dies bei elastischem Stoß so ist und da die Beobachtungen kleiner Geschwindigkeit neu gebildeter Ionen (S. 10) darauf schließen lassen. Ferner ist bei kleinen Streuwinkeln die Geschwindigkeit elastisch gestreuter Ionen weniger stark vom Streuwinkel abhängig (vgl. S. 20). Die Streurichtung in weitem Bereich beliebig einstellbar zu machen, wäre mit großen Schwierigkeiten verbunden.

Der Streuwinkel ist bei den späteren Messungen (Abb. 9, 10, 13 und 14) gerade so groß gewählt (ein paar Grad), daß der ohne Gasfüllung gemessene Ionenstrom einige Promille des mit Gasfüllung gemessenen beträgt, daß also mit Gasfüllung vorwiegend gestreute und nur sehr wenige unabgelenkte Ionen in den Geschwindigkeitsanalysator gelangen.

Bei einigen früheren Messungen (Abb. 11 und 12) dagegen lagen die Blenden B_1 und B_2 ungefähr in der anfänglichen Ionenstrahlrichtung. Die untersuchten Ionen waren dann größtenteils solche, die nicht gestoßen haben, und nur zum kleineren Teil gestreute. Das zahlenmäßige Verhältnis dieser beiden Anteile konnte dabei nicht angegeben werden.

4. Einzelheiten der Versuchsanordnung

Die folgende Beschreibung bezieht sich auf die Versuchsanordnung, wie sie bei den letzten Versuchen war, deren Ergebnisse in Abb. 9, 10 und 13—15 dargestellt sind. Die Apparatur (Abb. 7) enthält mehr Blenden, als in der vereinfachten Skizze (Abb. 6) angegeben. Über deren Bedeutung siehe weiter unten.

Einstellung des Streuwinkels

Das Blendensystem B_1, B_2 kann während der Versuche verschoben werden, so daß sich der durch B_1 und B_2 bestimmte Streuwinkel ein wenig

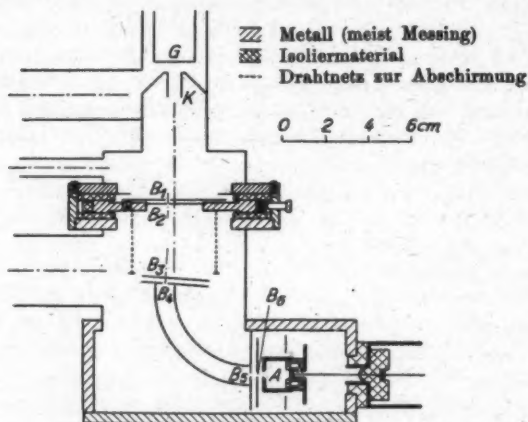


Abb. 7. Die Apparatur zur Messung der Geschwindigkeitsverteilung (Ionenquelle nur angedeutet)

G Glühnode, K Kanal, B_1 — B_5 Blenden, A Auffänger

Wichtigste Maße:

Kanal: Querschnitt $1 \times 6 \text{ mm}^2$, Länge 12 mm, B_1 : Durchmesser 0,3 mm, B_2 : Durchmesser 0,6 mm, B_3 : $0,3 \times 6 \text{ mm}^2$, Wegstrecke im Gas: 51 mm, Abstand B_1, B_2 : 35 mm, Abstand von B_2 bis zum Eingang des Zylinderkondensators: $l = 38,5 \text{ mm}$, mittlerer Radius des Zylinderkondensators: $r = 40 \text{ mm}$, Plattenabstand des Zylinderkondensators: $\Delta r = 8 \text{ mm}$, Winkel, den der Zylinderkondensator aus einem vollen Kreiszylinder heraus-schneidet: $\varphi = 94^\circ$

verändern läßt. Die Verschiebbarkeit wird mittels Planschliffen folgendermaßen erreicht: Das Apparaturgehäuse besteht aus zwei Hälften, von denen jede in einem plangeschliffenen Flansch endigt (vgl. Abb. 7). Zwischen diesen Flanschen liegen aufeinanderfolgend eine ringförmige Spiegelglasplatte zur Isolation, eine Messingscheibe mit plangeschliffenen Rändern, die die Blenden (B_1, B_2) trägt, und nochmals eine isolierende ringförmige Spiegelglasplatte. Die Schliff- und Spiegelglasflächen sind alle mit Apiezonfett ab-

gedichtet. Die in der Mitte liegende Scheibe mit dem Blendensystem ist durch Schrauben von außen verschiebbar, während die anderen Teile starr miteinander verbunden sind.

Zylinderkondensator

Als Ablenk Kondensator wurde ein Zylinderkondensator benutzt, weil mit ihm Fokussierung leicht erzielbar ist und weil seine Eigenschaften genau bekannt sind [(26)–(29)].

Die Daten des Kondensators und der wichtigsten Blenden sowie die im folgenden verwendeten Bezeichnungen sind der Tabelle von Abb. 7 zu entnehmen. Die kleinste Blende vor dem Kondensator ist B_3 . Der Kondensatoreingang mit den Eingangsblenden (B_3 und B_4) ist etwa 4° gegen die Horizontale geneigt, damit er ungefähr senkrecht zu dem eintretenden Ionenstrahl liegt. Den Abschluß des Zylinderkondensators bildet ein rechteckiger Schlitz (B_5).

Der Zylinderkondensator ist so dimensioniert, daß die Blende B_5 ungefähr auf den Schlitz B_3 abgebildet wird. Die Bedingung hierfür ist (26), (29)

$$\operatorname{tg}(\sqrt{2}\varphi) = -\sqrt{2} \frac{l}{r}.$$

Hieraus folgt

$$\varphi = 89^\circ.$$

Dieser Winkel braucht infolge der scharfen Ausblendung des in den Kondensator gelangenden Ionenstrahlbündels (B_3 : 0,6 mm Durchmesser) nicht genau eingehalten zu werden. Es ist $\varphi = 94^\circ$ gemacht, der Kondensatorausgang samt der Austrittsblende somit senkrecht angeordnet.

Die erforderliche Ablenkspannung errechnet sich für eine Ionengeschwindigkeit V zu

$$V_{\text{abl.}} = 2 \frac{dr}{r} V = 0,4 V.$$

Die Versuche ergaben fast genau diesen Wert, nämlich

$$V_{\text{abl.}} = 0,408 V.$$

Das Auflösungsvermögen des Geschwindigkeitsanalysators ist durch die Blenden B_3 und B_5 bestimmt. Die vorliegenden Blendengrößen lassen bei einer einheitlichen Ionengeschwindigkeit von 350 Volt eine scheinbare Geschwindigkeitsverteilung mit einer Halbwertsbreite von 3,3 Volt¹⁾ erwarten. Die Halbwertsbreite der be-

1) Dieser Wert hängt von der Ionengeschwindigkeit ab. Gemessene Verteilungskurven sind infolgedessen zu korrigieren, worauf besonders Kollath (38) hinweist. Die später angegebenen Verteilungskurven umfassen aber nur einen so kleinen Geschwindigkeitsbereich, daß die Korrektur weggelassen werden kann. Außerdem ist diese bei dem später angewendeten Meßverfahren (S. 19) nicht anzubringen.

Unter Geschwindigkeitsverteilung ist hier stets die Voltgeschwindigkeitsverteilung verstanden, die mit der Energieverteilung identisch ist.

obachteten Geschwindigkeitsverteilung in Argon gestreuter 350-Volt-Ionen (Abb. 9) beträgt in guter Übereinstimmung hiermit 3,6 Volt. Die Differenz von 0,3 Volt ist wohl auf etwas uneinheitliche Geschwindigkeit der Ionen zurückzuführen (vgl. S. 20).

*Beseitigung störender Ionenreflexion und Sekundärstrahlung von Oberflächen.
Zusätzliche elektrische Felder im Geschwindigkeitsanalysator*

Die zu messende Geschwindigkeitsverteilung soll neben einem hohen Maximum (elastisch gestreute Ionen) ein zweites viel niedrigeres Maximum (unelastisch gestreute Ionen) enthalten. Damit dieses nicht verdeckt wird, muß der störende Untergrund der Verteilungskurve möglichst klein im Vergleich zum Hauptmaximum bleiben. Verursacht wird dieser Untergrund durch Kaliumionen, die an Metallteilen der Apparatur reflektiert werden, oder durch dort ausgelöste Sekundärionen. Auch Sekundärelektronen sind unerwünscht. Sie können zwar den von positiven Ionen herrührenden Untergrund teilweise aufheben, die Unsicherheit des gemessenen Stroms aber nicht verkleinern, sondern nur vergrößern.

Im folgenden sind die verschiedenen Maßnahmen aufgezählt, die die reflektierten Ionen und die Sekundärstrahlung vermindern oder vom Auffänger weitgehend fernhalten.

Die Blendenränder sind angeschrägt (außer dem von B_2 , das ein Loch in nur 0,1 mm starkem Tombakblech ist), so daß nur von einer schmalen Kante störende Teilchen ausgehen können.

Wo mehrere Blenden dicht hintereinander liegen, sind sie verschieden groß. Wenn die erste der hintereinanderliegenden Blenden die kleinste ist (z. B. bei B_3 , B_4 sowie bei B_5 , B_6 , A), wird meist nur die erste von Primärionen getroffen. Ist dagegen die letzte die kleinste (z. B. bei B_1 , B_2), so geraten im allgemeinen nur vom letzten Blendenrand Teilchen in den eigentlichen Strahlengang.

Die Kondensatorplatten und die Blenden (B_1 — B_6 , Blende von A) sind berußt mittels einer Flamme von benzolgesättigtem Leuchtgas [(30)—(34)]. Hierdurch wird, wie die Versuche bestätigten, die Ionenreflexion und Sekundärstrahlung geringer und, wie sich herausstellte, auch besser konstant. Die Sekundärelektronenemission blanker Metallteile erhöhte sich durch längeren ununterbrochenen Kaliumionenbeschuß. Das führte zu Störungen, wenn durch Konstanthalten aller Spannungen eine Stelle des Ablenkkondensators viele Minuten lang beschossen wurde. Bei berußten Oberflächen wurde diese Erscheinung innerhalb Stundenbruchteilen nicht bemerkt.

Die störenden Teilchen, die trotz der verschiedenen Vorkehrungen noch aus dem Ablenkkondensator austreten, sind nur

zum Teil Ionen der kinetischen Energie, die die Ablenkspannung durchlassen soll. Zum Teil sind es auch von den Kondensatorplatten kommende Ionen von abweichender (meist geringerer) Energie und Elektronen, die beide andere Bahnen beschreiben als die durch die Eintrittsblende in den Kondensator gelangenden Ionen. Damit diese Teilchen nicht den Auffänger erreichen, folgt auf den Ablenk-kondensator zunächst ein schwaches Beschleunigungsfeld zwischen

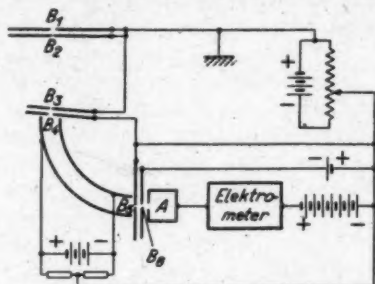


Abb. 8. Schaltung von Zylinderkondensator und Blenden

den Blenden B_6 und B_9 (vgl. Abb. 8), das die langsamen Elektronen zur Umkehr zwingt, dann eine Bremsspannung ($B_6 A$), die fast gleich der Geschwindigkeit der den Ablenk-kondensator durchlaufenden Ionen ist und alle langsameren Ionen zurückhält.

Die Bremsspannung ($B_6 A$) sollte demnach immer zu der jeweiligen Ablenkspannung passend gewählt werden. Um nun nicht die beiden Spannungen gleichzeitig verändern zu müssen, wurde noch eine Nachbeschleunigungsspannung ($B_8 B_9$) vor dem Eintritt der Ionen in den Ablenk-kondensator eingeführt und folgendermaßen verfahren: Ablenkspannung und Bremsspannung bleiben beide fest eingestellt auf eine Geschwindigkeit, die mindestens gleich der Geschwindigkeit der in den gasgefüllten Raum eintretenden Ionen ist. Durch Wahl der Nachbeschleunigungsspannung werden dann Ionen der gerade interessierenden Geschwindigkeit so weit nachbeschleunigt, daß sie durch den Ablenk-kondensator hindurchkommen. Die Geschwindigkeitsverteilungskurve erhält man also durch Messen des Auffängerstroms in Abhängigkeit von der Nachbeschleunigungsspannung $B_8 B_9$. Diese Spannung stellt hierbei bis auf einen konstanten Anteil unmittelbar den Geschwindigkeitsverlust der jeweils aufgefangenen Ionen dar.

Infolge der Spannung $B_3 B_4$ sind das Kondensatorgehäuse, die Mitte des Ablenk-kondensators und B_4 nicht mehr geerdet, sondern

befinden sich auf dem Potential von B_4 . Die Strecke B_1, B_2 ist durch ein mit B_2 und B_3 verbundenes, also geerdetes Drahtsystem gegen das Gehäuse abgeschirmt. Der Einfluß der Spannung B_1, B_2 auf die Fokussierung kann bei den niedrigen Spannungswerten, die praktisch angewandt wurden, vernachlässigt werden.

B_1 und B_2 blieben bei den hier wiedergegebenen Messungen geerdet, B_1 war also bei diesen Messungen überflüssig.

Durch Änderung verschiedener Spannungen boten sich Kontrollmöglichkeiten. Insbesondere wurde gelegentlich mittels der Gegenfeldmethode durch Verändern der Bremsspannung B_4 geprüft, ob die aufgefangenen Ionen tatsächlich die Geschwindigkeit hatten, die der Ablenspannung entspricht. Dies war stets der Fall. Ionen mit anderer Geschwindigkeit sowie Elektronen sind durch die angegebenen Maßnahmen so gut wie vollständig entfernt.

Bei einem früheren Versuch dagegen, als die eben beschriebenen Vorkehrungen noch nicht getroffen waren, verursachten Ionen, die mit falscher Geschwindigkeit durchkamen, ein zweites Maximum der Geschwindigkeitsverteilungskurve, dessen Höhe $1/_{100}$ des Hauptmaximums betrug.

An Blenden (oder dem Kanal) ausgelöste langsamere Ionen, die an der zu ihrer Geschwindigkeit gehörigen Stelle der Verteilungskurve erscheinen, kamen in dem untersuchten Geschwindigkeitsbereich nur vor, nachdem die Apparatur einmal besonders lange in Betrieb war, ohne gereinigt und neu mit Kalium beschickt zu werden. Sie konnten dann allerdings zu einem zweiten Maximum der Verteilungskurve führen und sehr stören.

*Uneinheitlichkeit der Ionengeschwindigkeit
infolge der Größe des erfaßten Streuwinkelbereichs*

Die Blenden B_1 und B_2 lassen einen gewissen kleinen Bereich von Streurichtungen zu. Wegen der Abhängigkeit der Ionengeschwindigkeit vom Streuwinkel ist daher die Geschwindigkeit der untersuchten Ionen nicht ganz einheitlich.

Der Streuwinkelbereich ist bei den vorliegenden Daten (Abb. 7)

$$\Delta \alpha = \frac{0,3 + 0,6}{35} = 0,026 = 1^\circ 30'.$$

Bei kleinen Streuwinkeln ergibt sich aus Energie- und Impulssatz die kinetische Energie der gestreuten Ionen zu

$$V = V_0 \left(1 - \frac{m}{M} \alpha^2 \right),$$

wenn V_0 die kinetische Energie nicht abgelenkter Ionen, m die Masse des stoßenden Ions, M die des gestoßenen Atoms ist. Die

Formel gilt auch für unelastischen Stoß, wenn nur der zur Anregung oder Ionisation verbrauchte Energiebetrag klein gegen die kinetische Energie und unabhängig von der Streurichtung ist. Unter V_0 ist dann die kinetische Energie der Ionen zu verstehen, die bei dem betreffenden unelastischen Stoßprozeß nicht abgelenkt worden sind. Durch Differentiation findet man

$$|\Delta V| = V_0 \frac{m}{M} \Delta(\alpha^2).$$

Falls $\Delta\alpha < \alpha$ ist, ist dies

$$|\Delta V| = 2V_0 \frac{m}{M} \alpha \Delta\alpha.$$

Die hieraus für verschiedene Fälle zu errechnende Energieuneinheitlichkeit ist nicht störend. Beispielsweise wird für 350-Volt-Ionen in Stickstoff und $\alpha = 3^\circ$

$$|\Delta V| = 1,3 \text{ Volt.}$$

Die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der Richtung ließe sich durch geeignete Dimensionierung des Zylinderkondensators in erster Näherung kompensieren — allerdings nur für einen bestimmten Wert $\frac{m}{M} \cdot \alpha$ — indem man nicht Ionen gleicher Geschwindigkeit auf dem Austrittspalt des Zylinderkondensators vereinigt, sondern solche Ionen, die zu gleichem V_0 gehören und deren Energie nach obiger Formel von der Richtung abhängt. Diese Maßnahme ist jedoch nur bei größeren Streuwinkeln, als sie hier untersucht werden, notwendig.

Die von der Entstehung der Ionen herrührende Energieuneinheitlichkeit dürfte zu vernachlässigen sein.

Strommessung

Der Auffängerstrom betrug 10^{-10} bis 10^{-11} Amp. (wenn nicht abgelenkte Ionen aufgefangen wurden, bis zu 10^{-9} Amp.). Er wurde mit einem Quadrantenelektrometer in Quadrantschaltung gemessen. Durch Parallelschalten eines Kondensators konnte die Ladungsempfindlichkeit des Elektrometers herabgesetzt werden.

Vakuumtechnisches

Da aus dem gasgefüllten Raum Gas durch den Kanal und die Blende B , verlorengeht und da die Metallapparatur verunreinigende Gase und Dämpfe abgibt, muß mit strömendem Gas gearbeitet werden. Durch ein Nadelventil strömt dauernd Gas aus einem Vorratsgefäß nach. Jeder der beiden Vakuumräume wird mit einer eigenen Diffusionspumpe laufend ausgepumpt; denn das Vakuum im Geschwindigkeitsanalysator soll wegen des dortigen langen Wegs der Ionen besser sein, als es über dem Kanal infolge des großen Kanalquerschnitts sein kann. Der Druck ist über dem Kanal ungefähr 15 mal kleiner,

im Geschwindigkeitsanalysatorraum 550mal kleiner als im gasgefüllten Raum, soweit nicht die Gasabgabe der Apparatur eine andere Grenze setzt.

Der Druck im gasgefüllten Raum wurde mit einem McLeodmanometer gemessen. Die Pumpleitungen, die Manometerszuführung und meist auch die Verbindung zwischen Gasvorratsgefäß und Nadelventil enthalten mit flüssiger Luft (oder Stickstoff) gekühlte Ausfrieraschen oder U-Rohre.

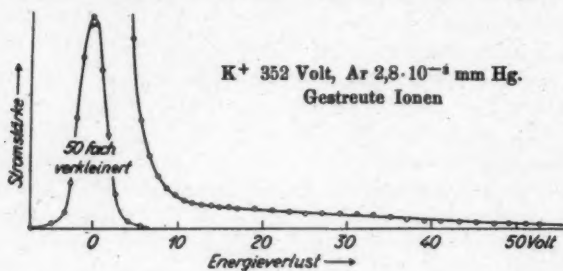


Abb. 9

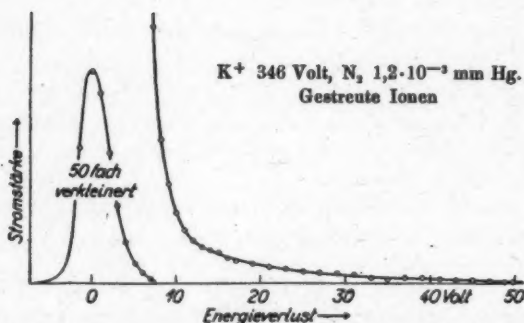


Abb. 10. (Streuwinkel und Versuchsanordnung genau wie bei Abb. 9)

Abb. 9 und 10. Geschwindigkeitsverteilung von Kaliumionen nach dem Durchgang durch Gase

5. Ergebnisse

Geschwindigkeitsverteilung der Kaliumionen

Die Abb. 9—12 zeigen die gemessene Geschwindigkeitsverteilung von 350-Volt-Ionen, die durch verschiedene Gase hindurchgegangen sind. Ein Teil der Abbildungen (Abb. 9 und 10) wurde mit der ausführlich beschriebenen Versuchsanordnung (S. 16) bei einem Streuwinkel von wenigen Grad gewonnen.

Bei den älteren Messungen der Abb. 11 und 12 dagegen wurden, wie schon erwähnt, Ionen untersucht, die ungefähr die ursprüngliche Strahlrichtung haben. Das sind vorwiegend solche, die keinen Stoß erlitten haben; welcher Bruchteil der beobachteten Ionen gestoßen hat, läßt sich dann nicht sagen. Das Auflösungsvermögen

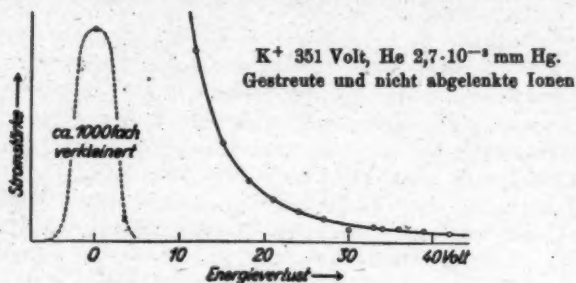


Abb. 11

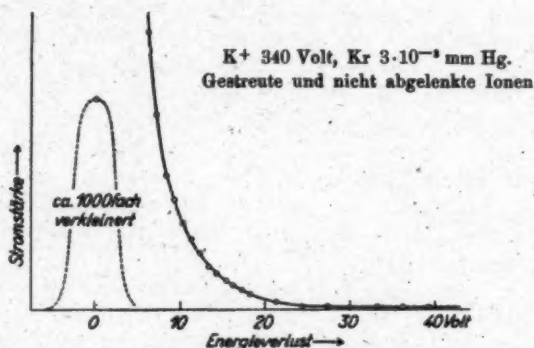


Abb. 12

Abb. 11 und 12. Geschwindigkeitsverteilung von Kaliumionen nach dem Durchgang durch Gase

des Geschwindigkeitsanalysators war bei diesen Messungen kleiner als bei den neueren.

Ordinate in den Abbildungen ist der Auffängerstrom (in den einzelnen Abbildungen in verschiedenem Maßstab). Der Abszissenmaßstab gibt die Energiedifferenz der jeweils aufgefangenen Ionen gegen die im Kurvenmaximum an. Das Maximum wird von Ionen gebildet, die einen elastischen Stoß mit kleiner Ablenkung oder

— in Abb. 11 und 12 — gar keinen Stoß ausgeführt und ihre Geschwindigkeit nicht merklich geändert haben. Die Energiedifferenz gegen das Maximum stellt daher praktisch den Energieverlust der aufgefundenen Ionen dar.

Als Ursache des Energieverlusts kommt in Frage: 1. unelastischer Stoß; 2. zweimaliger elastischer Stoß (vgl. S. 25); 3. Streuung an Apparaturteilen (falls sie noch nicht durch die S. 18 besprochenen Maßnahmen unschädlich gemacht ist), möglicherweise mit vorausgehendem oder nachfolgendem Stoß gegen ein Gasmolekül.

Der Energieverlust eines unelastisch stoßenden Ions ist größer als die Anregungs- oder Ionisierungsenergie¹⁾, da ja an das gestoßene Teilchen auch kinetische Energie abgegeben wird. Die übertragene kinetische Energie ist jedoch, wie leicht abzuleiten, vernachlässigbar klein, wenn der Streuwinkel klein ist und zugleich die Ionengeschwindigkeit groß gegen die Geschwindigkeit, von der ab der betreffende Anregungs- oder Ionisationsprozeß nach Energie- und Impulssatz möglich ist (S. 11). Unter diesen Bedingungen, die bei den meisten Messungen erfüllt waren, ist der Energieverlust bei unelastischem Stoß ungefähr gleich der Anregungs- oder Ionisierungsenergie.

Überraschenderweise sind die Geschwindigkeitsverteilungskurven im Anschluß an das Maximum gleichmäßig abfallend und sehr niedrig²⁾. Sie zeigen kein weiteres Maximum durch Ionisation oder Anregung.

Aus der Druckabhängigkeit des Ionenstroms sieht man (vgl. folgenden Abschnitt), daß die Ionen des langsam abfallenden Teils der Verteilungskurven vorwiegend solche sind, die zwei elastische Stöße ausgeführt haben.

Von unelastischem Stoß kommende Ionen sind nicht nachweisbar. Eine Abschätzung ergibt, daß in Abb. 9 die Ionen, die mit einem bestimmten Energieverlust unelastisch gestreut sind, weniger sind als $\frac{1}{1000}$ der elastisch gestreuten. Andernfalls müßten sie wohl zu einem Maximum führen, das bei mindestens 11,5 Volt Energieverlust liegt [d. i. das kleinste Anregungspotential von Ar; das kleinste von K^+ ist 20 Volt (40)] und das sich deutlich von dem kontinuierlichen Untergrund abhebt.

1) Etwaige kinetische Energie des frei werdenden Elektrons soll in die Ionisierungsenergie einbezogen sein.

2) Gelegentlich erkennbare kleine Abweichungen der Meßpunkte von den glatten Kurven sind nicht reell, sondern durch zeitliche Stromschwankungen, manchmal auch durch Sekundärelektronen (einzeln herausfallender Meßpunkt in Abb. 11) verursacht.

In Stickstoff sind im Gegensatz zu den einatomigen Gasen Anregungstöße mit kleinsten Energieverlusten möglich. Vielleicht ist die Unsymmetrie des Maximums der Verteilungskurve für Stickstoff (Abb. 10) dadurch bedingt.

Abhängigkeit des Stromes vom Gasdruck

Ionen, die zweimal elastisch stoßen, können beim einzelnen Stoß stark abgelenkt werden und zum Schluß doch in der wenig geneigten Richtung fliegen, auf die das Blendensystem eingestellt ist. Ihre kinetische Energie ist dann verringert, da ja bei stärkerer Ablenkung auf das gestoßene Teilchen merklich kinetische Energie übertragen wird. Die Energieverluste werden in einem gewissen Bereich beliebige Werte haben, da die Ablenkung beim einzelnen Stoß verschieden groß sein kann.

Um zu sehen, ob der allmählich abfallende Teil der Verteilungskurven auf diese Art durch zweimal elastisch stoßende Ionen verursacht wird, wurde mit Argon untersucht, wie der Auffängerstrom bei bestimmten Energieverlusten vom Gasdruck abhängt (Abb. 13). Zum Vergleich wurde auch der Strom nicht abgebremster Ionen (J_0) gemessen.

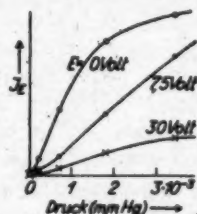


Abb. 13. Druckabhängigkeit des Stroms (J_x) bei verschiedenen Energieverlusten (E). K^+ (346 Volt) in Ar, J_0 100fach verkleinert

Bei niedrigen Gasdrucken gibt einmaliger Stoß einen Strom (J) proportional dem Druck p , zweimaliger Stoß proportional p^2 . Bei höheren Drucken kommt eine Schwächung der Ionenströme dazu. Daher ist

$$J = a \cdot p \cdot f(p) \quad \text{für einmaligen Stoß}$$

und

$$J = b \cdot p^2 \cdot f(p) \quad \text{für zweimaligen Stoß,}$$

worin $f(p)$ die Schwächung bei höheren Drucken wiedergibt, also für niedrige Drücke gegen eins und für hohe Drücke gegen null geht. Die Schwächung $f(p)$ ist für alle interessierenden Ionenströme dieselbe, unabhängig davon, ob es sich um ein-, zweimal oder nicht stoßende Ionen handelt; denn die im Gas zurückgelegten Wege sind nahezu gleich lang und auch die Ionengeschwindigkeiten nur wenig verschieden.

Der Strom J_E bei einem bestimmten Energieverlust E kann zum Teil von einmaligem Stoß und zum Teil von zweimaligem Stoß herrühren. Im Vakuum ist außerdem noch ein schwacher Reststrom ($J_{E \text{ Vak.}}$) nachweisbar. J_E läßt sich daher allgemein darstellen durch

$$J_E = J_{E \text{ Vak.}} + (a_E p + b_E p^2) \cdot f(p)^1).$$

Der Strom nicht abgebremster Ionen ist, da zu ihm zweimaliger Stoß nicht wesentlich beiträgt,

$$J_0 = J_{0 \text{ Vak.}} + a_0 p f(p).$$

Die Funktion $f(p)$ ist unbekannt²⁾ und soll deshalb aus J_E und J_0 eliminiert werden. Man findet

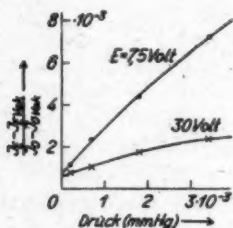


Abb. 14. $\frac{J_E - J_{E \text{ Vak.}}}{J_0 - J_{0 \text{ Vak.}}}$

nach den Werten von Abb. 13

$$\frac{J_E - J_{E \text{ Vak.}}}{J_0 - J_{0 \text{ Vak.}}} = \frac{a_E}{a_0} + \frac{b_E}{a_0} p.$$

Die aus den Messungen erhaltenen

Werte von $\frac{J_E - J_{E \text{ Vak.}}}{J_0 - J_{0 \text{ Vak.}}}$ (Abb. 14) zeigen

ungefähr die lineare Druckabhängigkeit. Bei einem Argondruck von $2,8 \cdot 10^{-3}$ mm Hg, wie er zur Messung der Geschwindigkeitsverteilung verwendet wurde, über-

wiegt $\frac{b_E}{a_0} p$ gegen $\frac{a_E}{a_0}$. Zu dem Strom J_E

liefert demnach das von zweimaligem

Stoß herrührende Glied $b_E p^2 f(p)$ den Hauptbeitrag. Die beobachteten Ionen mit Energieverlust sind also vorwiegend zweimal im Gas gestreut; da elastische Stöße bei weitem vorherrschen, sicher zweimal elastisch gestreut.

1) Richtiger wäre

$$J_E = (J_{E \text{ Vak.}} + a_E p + b_E p^2) \cdot f(p).$$

Da aber $J_{E \text{ Vak.}}$ klein ist, kann man es aus der Klammer herausnehmen, ohne einen großen Fehler zu machen.

2) $f(p)$ ist, wie der Verlauf von J_0 (Abb. 13) ergibt, keine Exponentialfunktion. Zu beachten ist, daß $f(p)$ auch die Schwächung der Ionenstrahlen auf der Beschleunigungsstrecke und die Schwächung der Atomstrahlen vor dem Auftreffen auf die Glühode enthält.

Vergleichsversuch mit Elektronen

Ein Vergleichsversuch mit Elektronen wurde mit der für Abb. 9 und 10 verwendeten Versuchsanordnung (aber nach neuer Blenden-einstellung und dadurch verändertem Streuwinkel) gemacht, indem sämtliche Spannungen umgekehrt wurden und die mit Kalium beschossene Wolframfolie unter geeigneten Bedingungen¹⁾ als Elektronenquelle diente. Die Elektronenströme waren allerdings sehr unkonstant. Die Emission der Kathode selbst schwankte und setzte manchmal ganz aus.

Die Geschwindigkeitsverteilung der durch Stickstoff hindurchgegangenen Elektronen (Abb. 15) läßt deutlich Geschwindigkeitsverluste durch Anregung und Ionisation erkennen. Welcher Bruch-

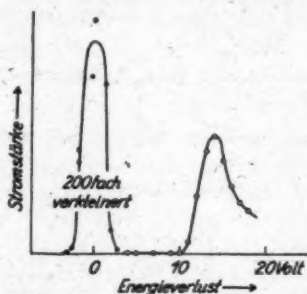


Abb. 15. Geschwindigkeitsverteilung von Elektronen (346 Volt) nach dem Durchgang durch Stickstoff ($1,9 \cdot 10^{-3}$ mm Hg)

teil der gestreuten Elektronen Energie verloren hat, ist nicht anzugeben, da das Hauptmaximum der Verteilungskurve gestreute und nicht gestreute Elektronen enthält. Im günstigsten beobachteten Fall (bei 170-Volt-Elektronen) betrug das durch unelastisch gestreute Elektronen gebildete Maximum etwa $\frac{1}{70}$ des Hauptmaximums. Bei Energieverlusten von 4–10 Volt verschwindet der Elektronenstrom²⁾.

1) Temperatur; Glühvorbehandlung; auch auf das vorhandene Gas kam es an.

2) Rudberg (46) beobachtete in diesem Bereich ein Maximum (bei 7 Volt), das er selbst ganz oder teilweise der Streuung an Metallteilen zuschreibt, und einen kontinuierlichen Untergrund, der wohl die gleiche Ursache hat. Offensichtlich sind die Maßnahmen gegen störende Sekundärstrahlung von Metallteilen (S. 18) auch bei Elektronenstrahlen sehr wirksam.

Rudberg hatte schärfere Geschwindigkeitsausblendung. Seine Geschwindigkeitsverteilungskurven enthalten daher mehr Einzelheiten als Abb. 15.

6. Diskussion. Folgerungen

Was stand zu erwarten?

Dem negativen Ergebnis über unelastische Streuung sei gegenübergestellt, was die bekannten Daten für Ionisation von Ar durch K^+ (350 Volt) etwa erwarten lassen. Der Wirkungsquerschnitt ist ungefähr $30 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^2 \cdot \text{mm Hg}}$ (Abb. 4, auf 350 Volt extrapoliert), der Ionisationsquerschnitt nach Nordmeyer (Abb. 5 dieser Arbeit) $1,1 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^2 \cdot \text{mm Hg}}$. Demnach führt $\frac{1}{30}$ aller Stöße zur Ionisation des gestoßenen Ar-Atoms. Wenn, die vom Ionisationsstoß kommenden Ionen die gleiche Winkelverteilung wie die elastisch gestreuten haben, sollen sie daher in der Geschwindigkeitsverteilungskurve ein Maximum bilden, das $\frac{1}{30}$ des Hauptmaximums beträgt, während die Abschätzung aus dem Meßergebnis $\frac{1}{1000}$ als höchstmöglicher Wert ergab.

Daß der Energieverlust außerhalb des untersuchten Geschwindigkeitsbereichs liegt und dadurch der Beobachtung entgangen ist, ist nicht denkbar. Die Ionisierungsenergie von Argon für Kaliumionenstoß muß zwischen 15 und 41 Volt liegen; denn 15,7 Volt ist das Ionisationspotential von Argon (41) und mehr als 41 Volt kann der Energieverbrauch nicht sein, da sonst die Ionisation nach Energie- und Impulssatz nicht bei 82 Volt Ionengeschwindigkeit einsetzen könnte (S. 11). Überdies wurde in Argon gelegentlich die Messung — wenn auch weniger sorgfältig — bis 150 Volt Energieverlust ausgedehnt, ohne daß ein Maximum gefunden wurde.

Weiter oben (S. 10) wurde schon gesagt, daß die Elektronen, die bei der Ionisation durch Ionenstoß frei werden, keine nennenswerte Geschwindigkeit haben. Es ist also auch nicht anzunehmen, daß das Maximum in der Geschwindigkeitsverteilungskurve dadurch, daß die Elektronen unterschiedliche kinetische Energie erhalten, verbreitert und niedriger ist.

In Krypton ionisieren Kaliumionenstrahlen ungefähr ebenso stark wie in Argon (8), so daß auch da die Ionen, die ionisiert haben, zu beobachten sein sollten.

Wie viele verlangsamte Ionen von Anregungsstößen zu erwarten sind, läßt sich nicht abschätzen, da die absolute Ausbeute von Anregungsstößen bisher nur in wenigen Fällen gemessen wurde (42), (48), (55). In diesen Fällen sind die Anregungsquerschnitte wesentlich kleiner als der Ionisationsquerschnitt $K^+ - \text{Ar}$.

Erklärungsmöglichkeiten für das Fehlen von Energieverlusten durch Ionisation

Im folgenden sind die verschiedenen Erklärungsmöglichkeiten für das negative Ergebnis angegeben und im Fall K^+ -Ar geprüft.

Erste Erklärungsmöglichkeit: Es treten mehrere Prozesse mit verschiedenen Energieverlusten ein, die zur Ionisation führen. An Stelle eines Maximums durch Ionisation zeigt die Geschwindigkeitsverteilung infolgedessen eine Anzahl kleinerer, die vielleicht nicht mehr beobachtbar sind.

Es läßt sich leicht überschlagen, daß die Maxima aus diesem Grund nur schwerlich unbeobachtbar klein werden können. Ihre Anzahl müßte dazu schon sehr groß sein.

Zweite Erklärungsmöglichkeit: Kleine Streuwinkel sind beim Ionisationsstoß nicht oder nur wenig bevorzugt.

Hierdurch läßt sich das negative Ergebnis erklären. Es wurden ja stets nur kleine Streuwinkel untersucht.

Im anderen Extremfall allerdings, wenn große Streuwinkel beim Ionisationsstoß vorherrschen, hätten in Argon die neu entstandenen Argonionen sich zeigen müssen. Da die beiden stoßenden Teilchen gleiche Masse haben, sind nämlich nach Energie- und Impulssatz die Geschwindigkeiten von K^+ und dem neu entstandenen Ar^+ bei großen Streuwinkeln gerade vertauscht gegenüber kleinen Streuwinkeln, so daß Ar^+ mit der gleichen Geschwindigkeit (und kinetischen Energie) erscheint wie ein wenig abgelenktes K^+ , das die Ionisationsenergie verloren hat.

Denkbar ist jedoch, daß irgendwelche mittleren Streuwinkel vorwiegend oder ausschließlich vorkommen, oder auch, daß alle Streurichtungen, soweit sie der Impulssatz zuläßt, nahezu gleich wahrscheinlich sind¹⁾.

Nach einer rohen Abschätzung muß die eingestellte Richtung etwa 17 mal stärker vertreten sein als bei gleichmäßiger Richtungsverteilung, wenn die Ionen, die ionisiert haben, eben noch nachzuweisen sein sollen. Zum Vergleich sei angegeben, daß für elastische Streuung die eingestellte Richtung schätzungsweise 600 fach bevorzugt ist gegenüber gleichmäßiger Richtungsverteilung.

Dritte Erklärungsmöglichkeit: Nicht das Argonatom, sondern das K^+ -Ion wird ionisiert. Das entstehende K^{++} -Ion erforderte doppelte

1) „Gleiche Wahrscheinlichkeit aller Streurichtungen“ oder „gleichmäßige Richtungsverteilung“ soll heißen: Die Wahrscheinlichkeit, daß das gestreute Ion in ein gewisses Raumwinkelement fliegt, ist für jedes Raumwinkelement von gleicher Größe gleich groß.

Ablenkspannung, wäre also bei den angewendeten Spannungen nicht zu beobachten.

Gegen diese Erklärungsmöglichkeit spricht, daß K^+ eine Ionisierungsspannung von 31,7 Volt (41) hat, Ar dagegen nur 15,7 Volt.

Die einleuchtendste von den drei Erklärungsmöglichkeiten ist die zweite.

Folgerungen

Die Kaliumionen scheinen beim Ionisationsstoß, wie eben auseinandergesetzt wurde, weder kleine noch extrem große Streuwinkel besonders zu bevorzugen, sondern vielleicht mittlere Streuwinkel, oder sie verteilen sich ziemlich gleichmäßig über alle möglichen Richtungen. Das bedeutet, daß der Stoß eines Kaliumions gegen ein Atom nicht streifend (kleiner Streuwinkel!) und auch nicht zentral (großer Streuwinkel!) sein muß, um Ionisation des gestoßenen Teilchens hervorzurufen.

Wenn größere Streuwinkel häufig sind, folgt aus Energie- und Impulssatz:

1. Die neu entstandenen Ionen haben oft beachtliche Geschwindigkeit (vgl. S. 10).

2. Der mittlere Energieverlust eines Ions beim Ionisationsstoß ist größer als die Ionisierungsenergie. Er kann, wenn beide Stoßpartner gleiche Masse haben, ein großer Bruchteil der gesamten kinetischen Energie sein.

Es ist bekannt, daß die Intensitätsabnahme langsamer Ionenstrahlen in Gasen vorwiegend durch Streuung, manchmal auch durch Umladung verursacht wird und daß Abbremsung nur wenig ausmachen kann. Die vorliegenden Meßergebnisse zeigen, daß Energieverluste wenig abgelenkter Kaliumionenstrahlen in He, Ar, Kr und N₂ so selten sind, daß man sagen darf: Energieverluste ohne stärkere Richtungsänderung tragen zur Intensitätsabnahme von Kaliumionenstrahlen in diesen Gasen überhaupt nicht bei.

Möglichkeit weiterer Messungen

Weitere Versuche, Energieverluste durch Ionisation oder Anregung nachzuweisen, müßten sich vor allem mit größeren Streuwinkeln befassen. Möglicherweise kommt man dabei zu recht kleinen, schwer meßbaren Stromstärken. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Streuwinkel, die bei größeren Streuwinkeln stärker ist, könnte man in erster Näherung kompensieren, etwa nach der auf S. 21 angegebenen Methode.

Wenn es gelingt, durch geeignete ionenoptische Maßnahmen die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Streuwinkel in höherer

Näherung zu kompensieren, braucht kein bestimmter Streuwinkel mehr ausgeblendet zu werden. Dann sind Messungen möglich, die sich über einen ganzen Bereich von Streuwinkeln erstrecken. Derartige Messungen versprechen mehr Erfolg.

Vielleicht kann auch einmal auf anderem Weg, etwa durch Beobachtung der Leuchterscheinungen, Aufschluß über die Vorgänge bei der Ionisation durch Ionenstrahlen gewonnen werden.

IV. Zusammenfassung

Kaliumionenstrahlen wurden durch Oberflächenionisation erzeugt in einer Apparatur, die im wesentlichen früher schon beschrieben ist, deren Ergiebigkeit aber durch eine kleine Verbesserung noch sehr gesteigert werden konnte.

Gemessen wurde zunächst die Intensitätsabnahme der Ionenstrahlen (12—200 Volt Geschwindigkeit) in Argon. Die Wirkungsquerschnitte, die sich aus den Meßergebnissen errechnen lassen, stimmen mit den Werten anderer Autoren befriedigend überein.

Zweitens wurde die Geschwindigkeitsverteilung von Ionen untersucht, die durch Gas (He, Ar, Kr oder N₂) hindurchgegangen sind und dabei ihre Flugrichtung nicht oder nur wenig geändert haben. Die Geschwindigkeitsverteilung wurde durch Ablenkung in einem Zylinderkondensator gemessen, wie es bei Elektronen öfter geschieht. Durch allerlei Vorkehrungen soll eine möglichst kleine Menge verlangsamer Ionen unter vielen raschen erkennbar werden trotz der besonderen bei Ionen sich ergebenden Schwierigkeiten.

Die Absicht war, wenn möglich, Energieverluste festzustellen, die durch Stoßionisation von Gasmolekülen eintreten. Es zeigte sich aber, daß unter den gewählten Bedingungen (350 Volt Anfangsgeschwindigkeit, kleiner Streuwinkel, niedriger Gasdruck) nur sehr wenige Ionen Geschwindigkeitsverluste erleiden. Geschwindigkeitsverluste durch unelastischen Stoß waren überhaupt nicht nachzuweisen.

Die beobachteten Geschwindigkeitsverluste sind, wie eine nähere Prüfung ergibt, vorwiegend durch zweimaligen elastischen Stoß verursacht (S. 25). Sie verteilen sich kontinuierlich über alle Werte des ausgemessenen Bereichs.

Die Kaliumionen, die ionisiert haben, sollten in Ar und Kr ziemlich zahlreich sein. Wenn sie trotzdem den Messungen entgangen sind, sind sie wohl beim Ionisationsstoß im allgemeinen stärker abgelenkt worden. Bevorzugte Ablenkung unter den größten möglichen Winkeln ist jedoch mit den Meßergebnissen ebenfalls kaum verträglich.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Geheimrat Prof. Dr. J. Zenneck, unter dessen Leitung die Arbeit ausgeführt wurde, für alle Unterstützung zu danken. Herrn Prof. Dr. R. Tomaschek danke ich für die Förderung der letzten Untersuchungen. Anregung und wertvollen Rat zu einem Teil der Arbeit verdanke ich Herrn Dr. H. Straub. Der Gesellschaft für Linde's Eismaschinen A.-G. in Höllriegelskreuth bei München, die die Edelgase überließ und stets flüssige Luft lieferte, sei ebenfalls gedankt.

V. Literatur

Zu I (Ionenquelle)

- 1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. [4] 28. S. 75. 1909.
- 2) M. Knudsen, Ann. d. Phys. [4] 28. S. 999. 1909.
- 3) H. Pöeverlein, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 92. 1936.

Zu II (Intensitätsabnahme, Wirkungsquerschnitt)

- 4) F. M. Durbin, Phys. Rev. 30. S. 844. 1927.
- 5) Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen, Bd. I, 5. Aufl. (Berlin 1923), S. 119.
- 6) C. Ramsauer u. O. Beeck, Ann. d. Phys. [4] 87. S. 1. 1928.
- 7) O. Schmidt, Ann. d. Phys. [5] 21. S. 241. 1934.

Zu III (Geschwindigkeitsverteilung)

Ionisation durch langsame Ionen- und Atomstrahlen

Experimentelle Arbeiten [aß 1933 und einzelne ältere. Weitere ältere Literatur über Ionisation durch Ionenstrahlen vgl. (52)]:

- 8) O. Beeck, Ann. d. Phys. [5] 6. S. 1001. 1930; 18. S. 414. 1933; O. Beeck u. J. C. Mouson, ebenda 11. S. 737. u. 858. 1931.
- 9) O. Beeck u. H. Wayland, Ann. d. Phys. [5] 19. S. 129. 1934; O. Beeck, Ztschr. f. Phys. 76. S. 799. 1935.
- 10) C. J. Brasefield, Phys. Rev. 43. S. 785. 1933.
- 11) A. C. Davies, Proc. Roy. Soc. (A) 155. S. 123. 1936.
- 12) C. A. Frische, Phys. Rev. 43. S. 160. 1933.
- 13) J. C. Mouson u. N. H. Smith, Phys. Rev. 48. S. 420. 1935.
- 14) M. Nordmeyer, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 706. 1933.
- 15) A. Rostagni, Il Nuovo Cim. (N. S.) 11. S. 621. 1934.
- 16) A. Rostagni, Il Nuovo Cim. (N. S.) 13. S. 389. 1936; 15. S. 117. 1938.
- 17) A. Rostagni, Phys. Rev. 53. S. 729. 1938.
- 18) R. N. Varney, Phys. Rev. 47. S. 483. 1935.
- 19) R. N. Varney u. Mitarbeiter, Phys. Rev. 50. S. 159 u. 261. 1936; 53. S. 526. 1937.
- 20) R. N. Varney, Phys. Rev. 53. S. 732. 1938.
- 21) F. Wolf, Ann. d. Phys. [5] 23. S. 627. 1935; 25. S. 737. 1936; 27. S. 543. 1936; 29. S. 33. 1937; 34. S. 341. 1939.

Theoretische Arbeiten [weitere angeführt in (52)]:

- 22) R. Döpel, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 24. 1933.
- 23) G. Joos u. H. Kulenkampff, Phys. Ztschr. 25. S. 257. 1924.
- 24) H. S. W. Massey u. R. A. Smith, Proc. Roy. Soc. (A) 142. S. 142. 1933.
- 25) F. Zwicky, Proc. Nat. Acad. Amer. 18. S. 314. 1932.

Geschwindigkeitsanalyse mittels Zylinderkondensator [vgl. auch (35) und (46)]

- 26) R. Herzog u. J. Mattauch, Ann. d. Phys. [5] 19. S. 358. 1934;
- R. Herzog, Ztschr. f. Phys. 89. S. 447. 1934.
- 27) R. Herzog, Phys. Ztschr. 41. S. 18. 1940.
- 28) A. L. Hughes u. V. Rojanski, Phys. Rev. 34. S. 284. 1929;
- A. L. Hughes u. J. H. McMillen, Phys. Rev. 34. S. 291. 1929.
- 29) W. R. Smythe, Phys. Rev. 45. S. 299. 1934.

Berufen von Elektroden

Verringerung der Sekundärstrahlung bei Kathodenstrahlen:

- 30) P. Lenard, Ann. d. Phys. [4] 15. S. 505. 1904.

Verringerung von Ionenreflexion und Sekundärstrahlung bei Ionenstrahlen:

- 31) O. Beeck, Ann. d. Phys. [5] 6. S. 1007. 1930.
- 32) C. Ramsauer u. R. Kollath, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 560. 1933.
- 33) F. Wolf, Ztschr. f. Phys. 74. S. 580. 1931.

Gasabgabe von Ruß im Vakuum:

- 34) R. Behne u. H. Löhner, Ann. d. Phys. [5] 22. S. 92. 1935.

Verschiedenes

- 35) F. L. Arnot u. M. B. M'Ewen, Proc. Roy. Soc. (A) 169. S. 437. 1939;
- F. L. Arnot u. W. D. Hart, ebenda 171. S. 383. 1939.
- 36) K. H. Bracewell, Phys. Rev. 54. S. 639. 1938.
- 37) R. B. Kennard, Phys. Rev. 31. S. 423. 1928.
- 38) R. Kollath, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 721. 1936.
- 39) R. Koops, Ann. d. Phys. [5] 33. S. 57. 1938; dazu auch G. Joos, Ann. d. Phys. [5] 41. S. 426. 1942.
- 40) Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen, III. Erg.-Bd., 2. TL (Berlin 1935) S. 869.
- 41) Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen, III. Erg.-Bd., 2. TL (Berlin 1935) S. 871.
- 42) V. Neumann, Ann. d. Phys. [5] 34. S. 603. 1939.
- 43) C. Ramsauer u. R. Kollath, Ann. d. Phys. [5] 17. S. 762. 1933.
- 44) A. Rostagni, Il Nuovo Cim. (N. S.) 12. S. 144. 1935.
- 45) A. G. Rouse, Phys. Rev. 52. S. 1238. 1937; vgl. dazu J. A. Eldridge, Phys. Rev. 59. S. 473. 1941.
- 46) E. Rudberg, Proc. Roy. Soc. (A) 129. S. 628. 1930.
- 47) J. S. Thompson, Phys. Rev. 35. S. 1196. 1930.
- 48) W. Trittelvitz, Ann. d. Phys. [5] 40. S. 131. 1941.
- 49) F. Wolf, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 547. 1936.
- 50) F. Wolf, Ann. d. Phys. [5] 28. S. 438. 1937; 30. S. 313. 1937.

Zusammenfassende Darstellungen

- 51) A. Becker, *Die Phys. in regelm. Ber.* 2. S. 47. 1934; 6. S. 55. 1938.
- 52) O. Beeck, *Phys. Ztschr.* 35. S. 36 u. 454. 1934.
- 53) H. Geiger u. K. Scheel, *Handb. d. Physik*, 2. Aufl., Bd. XXII, 2. Tl. (Berlin 1933): Negative und positive Strahlen.
- 54) Landolt-Börnstein, *Physikalisch-chemische Tabellen*, III. Erg.-Bd., 2. Tl. (Berlin 1935), S. 1278: Durchgang von Korpuskularstrahlen durch Materie. II. Durchgang langsamer Teilchen (R. Kollath).
- 55) W. Maurer, *Phys. Ztschr.* 40. S. 161. 1939.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 6. August 1942)

Über den Einstellvorgang eines „Doppelgalvanometers“

Von G. Passoth

(Mit 7 Abbildungen)

1. Einleitung

In den letzten Jahren ist es gelungen, die Ausschläge von Spiegelgalvanometern in praktisch beliebigem Grade zu verstärken und auf diese Weise die kleinen Schwankungen der Galvanometerspule sichtbar zu machen, die durch die Stöße der umgebenden Luftmoleküle bzw. durch die spontanen Stromschwankungen im Stromkreis des Galvanometers hervorgerufen werden, und die der Messung von Strömen eine untere Grenze setzen. Diese Grenze kann in verhältnismäßig einfacher Weise durch Anwendung entweder eines „Thermorelais“¹⁾ oder eines „Photozellenrelais“²⁾ erreicht werden. Bei ersterem wird dabei der Leuchtfaden einer Fadenlampe über den Galvanometerspiegel auf die Mitte zwischen zwei Thermoelementen, bei der letzteren z. B. eine beleuchtete quadratische oder rechteckige Blende auf die Mitte einer Differentialphotozelle abgebildet. Eine kleine Drehung des Galvanometerspiegels ruft dann einen dieser Drehung proportionalen Thermostrom bzw. Photostrom hervor, der mit einem zweiten Galvanometer gemessen wird. Man wird nun, ebenso wie bei Benutzung eines einzigen Galvanometers, stets bestrebt sein, die Einstellzeit eines solchen „Doppelgalvanometers“ möglichst klein zu halten. Die Einstellzeit kann dabei ebenso wie bei einem einzelnen Galvanometer als die Zeit definiert werden, in der das zweite Galvanometer von einem Anfangsausschlag bis auf einen gewissen Bruchteil — etwa $\frac{1}{1000}$ — dieses Anfangsausschlages zurückgegangen ist. Sie hängt außer von dem vorgegebenen Verhältnis der Schwingungsdauern der beiden benutzten Galvanometer und von jener erwähnten Toleranz noch von der Dämpfung des ersten sowie der des zweiten Galvanometers ab. Während es nun schon lange bekannt ist, daß sich ein einzelnes Galvanometer un-

1) W. J. H. Moll u. H. C. Burger, Phil. Mag. 50. S. 626. 1925.

2) L. Bergmann, Phys. Ztschr. 33. S. 824. 1932; R. B. Barnes u. F. Matossi, Ztschr. f. Phys. 76. S. 24. 1932

gefähr bei kritischer Dämpfung am schnellsten einstellt, und auch die Abhängigkeit der Einstellzeit von der Dämpfung berechnet worden ist¹⁾, ist die Frage der kürzest möglichen Einstellzeit bei Benutzung eines Doppelgalvanometers bisher nicht behandelt worden. Die Beantwortung dieser Frage ist aus zwei Gründen wichtig: Erstens wird man, wie bereits erwähnt, bestrebt sein, die Einstellzeit möglichst klein zu halten. Es ist aber von vornherein nicht sicher, daß diese kürzeste Einstellzeit stets bei gleicher, insbesondere etwa kritischer Dämpfung beider Galvanometer erreicht wird; es wird sich zeigen, daß dieses tatsächlich keineswegs der Fall ist. Der zweite Grund bezieht sich auf die durch die Brownsche Bewegung der Galvanometerspule bedingte Meßgrenze für kleine Ströme: Es sind Versuche gemacht worden, diese Grenze durch Benutzung eines Doppelgalvanometers hinauszuschieben²⁾. Dieses ist bisher aber nur auf Kosten der Einstellzeit des Gesamtsystems gelungen, und wie Zernike³⁾ für die spezielle Hardysche Anordnung (Resonanzradiometer) nachgewiesen hat, kann man mit einem einzelnen Galvanometer gleicher Empfindlichkeit unter Berücksichtigung der vergrößerten Einstellzeit bei geeigneter Beobachtungsmethode die Grenze ebenso weit bzw. noch weiter hinausschieben wie bei Benutzung eines Doppelgalvanometers. Firestone⁴⁾ hat sogar die Vermutung ausgesprochen, daß es überhaupt nicht möglich ist, durch Benutzung zweier Galvanometer kleinere Ströme zu messen als dies mit einem einzelnen Galvanometer gleicher Empfindlichkeit möglich ist. Eine etwas eingehendere Untersuchung hierüber soll einer in Kürze folgenden Veröffentlichung vorbehalten bleiben. Hier interessiert nur die Tatsache, daß auch zur Behandlung dieser Frage offenbar die Kenntnis der kürzest möglichen Einstellzeit eines Doppelgalvanometers nötig ist.

§ 2. Ableitung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegung der Spule eines Drehspulgalvanometers, die von einem irgendwie erreichten Ausschlag ohne äußere Energiezufuhr in die Ruhelage zurückgeht, ist bestimmt durch das System zweier gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\Phi \cdot \ddot{\alpha} + f \dot{\alpha} + D\alpha - BJ &= 0, \\ LJ + RJ + B\dot{\alpha} &= 0.\end{aligned}$$

1) G. Ising, Ann. d. Phys. 8. S. 911. 1931.

2) J. D. Hardy, Rev. Scient. Instr. 5. S. 120. 1934.

3) F. Zernike, Ztschr. f. Phys. 79. S. 516. 1932.

4) F. A. Firestone, Rev. Scient. Instr. 3. S. 163. 1932.

Hierin bedeuten:

- α = Drehwinkel der Galvanometerspule,
 Φ = Trägheitsmoment der Galvanometerspule,
 f = Luftdämpfung,
 D = Direktionskraft,
 B = „dynamische Galvanometerkonstante“,
 J = durch die Bewegung in der Spule induzierter Strom,
 L = Selbstinduktion der Spule,
 R = Widerstand des Stromkreises.

In allen vorkommenden Fällen kann man in der zweiten Gleichung das Glied LJ gegenüber den anderen beiden Gliedern vernachlässigen. Rechnet man unter dieser Vernachlässigung aus der zweiten Gleichung J aus und setzt es in die erste Gleichung ein, so erhält man statt obiger zwei Differentialgleichungen die eine:

$$(1) \quad \Phi \ddot{\alpha} + \left(f + \frac{B^2}{R}\right) \dot{\alpha} + D \alpha = 0.$$

B^2/R stellt die elektromagnetische Dämpfung dar.

Setzt man $\frac{1}{\Phi} \cdot \left(f + \frac{B^2}{R}\right) = 2d\omega$, so bedeutet d die Dämpfung in Vielfachen der kritischen Dämpfung¹⁾. Ferner ist $\frac{D}{\Phi} = \omega^2$, dem Quadrat der Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung des Galvanometers. Gl. (1) geht mit diesen Bezeichnungen über in:

$$(2) \quad \ddot{\alpha} + 2d\omega \dot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0.$$

Im folgenden seien alle Größen, die sich auf das erste Galvanometer einer Verstärkeranordnung beziehen, durch den Index 1 von den entsprechenden Größen bei dem zweiten Galvanometer mit dem Index 2 unterschieden.

Aus Gl. (2) ergibt sich die Bewegungsgleichung der Spule des ersten Galvanometers unter den Anfangsbedingungen, daß zur Zeit $t = 0$ $\alpha_1 = \alpha_0$ und $\dot{\alpha}_1 = 0$ sein soll:

$$(3a) \quad \begin{cases} \alpha_0 \frac{e^{-d_1 \omega_1 t}}{\sqrt{1-d_1^2}} \sin(\omega_1 \sqrt{1-d_1^2} t + \varepsilon_1) & \text{für } d_1 < 1, \end{cases}$$

$$(3b) \quad \alpha_1 = \begin{cases} \alpha_0 (1 + \omega_1 t) e^{-\omega_1 t} & \text{für } d_1 = 1, \end{cases}$$

$$(3c) \quad \begin{cases} \alpha_0 \frac{e^{-d_1 \omega_1 t}}{\sqrt{d_1^2-1}} \text{Sin}(\omega_1 \sqrt{d_1^2-1} t + \varepsilon_1') & \text{für } d_1 > 1, \end{cases}$$

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} \sin \varepsilon_1 &= i \text{Sin} \varepsilon_1' = \sqrt{1-d_1^2}, \\ \cos \varepsilon_1 &= \text{Cos} \varepsilon_1' = d_1 \end{aligned}$$

1) d kann bekanntlich experimentell leicht aus dem Verhältnis V zweier aufeinanderfolgender gleichgerichteter Maximalausschläge nach der Beziehung

$$V = e^{\frac{2\pi d}{\sqrt{1-d^2}}} \text{ bestimmt werden.}$$

bzw., wenn man die Fälle $d_1 < 1$ und $d_1 > 1$ zusammenfaßt,

$$(3d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_0 \frac{e^{-d_1 \omega_1 t}}{2\sqrt{d_1^2 - 1}} [(\sqrt{d_1^2 - 1} + d_1) e^{\omega_1 \sqrt{d_1^2 - 1} t} \\ \quad + (\sqrt{d_1^2 - 1} - d_1) e^{-\omega_1 \sqrt{d_1^2 - 1} t}] \quad \text{für } d_1 \leq 1. \end{array} \right.$$

Aus diesen Gleichungen kann die Einstellzeit $t = t_E$ etwa für die Toleranz $\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{1}{1000}$ in Abhängigkeit von der Dämpfung d_1 berechnet werden; die Berechnung ist in der Arbeit von Ising veröffentlicht worden.

Durch eine Drehung der ersten Galvanometerspule wird nun in der Verstärkeranordnung ein dem Drehwinkel proportionaler Thermo- bzw. Photostrom hervorgerufen, der ein Drehmoment der Spule des zweiten Galvanometers proportional α_1 hervorruft. Für die zweite Spule gilt dann unter der Voraussetzung, daß die Einstellzeit des Thermoelements bzw. der Photozelle allein klein ist gegenüber der Schwingungsdauer der Galvanometer:

$$\alpha_2 + 2d_2 \omega_2 \dot{\alpha}_2 + \omega_2^2 \alpha_2 = \begin{cases} k \frac{\alpha_0}{\sqrt{1 - d_1^2}} e^{-d_1 \omega_1 t} \sin(\omega_1 \sqrt{1 - d_1^2} t + \varepsilon_1) & \text{für } d_1 < 1, \\ k \alpha_0 (1 + \omega_1 t) e^{-\omega_1 t} & \text{für } d_1 = 1, \\ k \frac{\alpha_0}{\sqrt{d_1^2 - 1}} e^{-d_1 \omega_1 t} \sin(\omega_1 \sqrt{d_1^2 - 1} t + \varepsilon_1') & \text{für } d_1 > 1, \\ k \frac{\alpha_0}{2\sqrt{d_1^2 - 1}} e^{-d_1 \omega_1 t} [(\sqrt{d_1^2 - 1} + d_1) e^{\omega_1 \sqrt{d_1^2 - 1} t} \\ \quad + (\sqrt{d_1^2 - 1} - d_1) e^{-\omega_1 \sqrt{d_1^2 - 1} t}] & \text{für } d_1 \leq 1, \end{cases}$$

mit $\begin{aligned} \sin \varepsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - d_1^2}}, \\ \cos \varepsilon_1 &= d_1. \end{aligned}$

Die Größe des Proportionalitätsfaktors k ergibt sich, wenn man bedenkt, daß bei konstantem durch das erste Galvanometer fließenden Strom auch der Ausschlag α_2 des zweiten Galvanometers konstant sein muß und zwar gleich dem Ausschlag α_1 des ersten Galvanometers, multipliziert mit dem Verstärkungsfaktor. Für die Einstellzeit ist der Verstärkungsfaktor unwesentlich; wir setzen ihn daher gleich 1. Es ist dann $k = \omega_2^2$. Führt man weiter die neue Variable $\tau = \omega_2 t = \frac{2\pi t}{T_2}$ ein, (T_2 = Schwingungsdauer des ungedämpften Galvanometers), wobei die Differentialquotienten nach τ mit α_1' bzw. α_2'' bezeichnet werden sollen, und bezeichnet man schließlich noch $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{T_1}{T_2}$ mit a , so vereinfachen sich die Gleichungen zu:

$$\begin{aligned}
 (4a) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-d_1^2}} e^{-\frac{d_1}{a} \tau} \sin \left(\frac{\sqrt{1-d_1^2}}{a} \tau + \varepsilon_1 \right) \quad \text{für } d_1 < 1, \\ \alpha_0 \left(1 + \frac{1}{a} \tau \right) e^{-\frac{1}{a} \tau} \quad \text{für } d_1 = 1, \\ \alpha_0 \frac{1+2d_1}{\sqrt{1-d_1^2}} e^{-\frac{d_1}{a} \tau} \operatorname{Etn} \left(\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a} \tau + \varepsilon_1 \right) \quad \text{für } d_1 > 1, \end{array} \right. \\
 (4b) \quad & \alpha_0 \left(1 + \frac{1}{a} \tau \right) e^{-\frac{1}{a} \tau} \quad \text{für } d_1 = 1, \\
 (4c) \quad & \alpha_3'' + 2d_1 \alpha_3' + \alpha_3 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-d_1^2}} e^{-\frac{d_1}{a} \tau} \operatorname{Etn} \left(\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a} \tau + \varepsilon_1 \right) \quad \text{für } d_1 > 1, \\
 (4d) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_0}{2\sqrt{d_1^2-1}} e^{-\frac{d_1}{a} \tau} \left[(\sqrt{d_1^2-1} + d_1) e^{\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a} \tau} \right. \\ \left. + (\sqrt{d_1^2-1} - d_1) e^{-\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a} \tau} \right] \quad \text{für } d_1 \neq 1. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Im folgenden sei nur der Fall kritischer Dämpfung des zweiten Galvanometers, also $d_2 = 1$, betrachtet; denn es ist analog zu den Verhältnissen bei einem einzigen Galvanometer nicht zu erwarten, daß das Gesamtsystem sich bei anderer Dämpfung des zweiten Galvanometers *wesentlich* schneller einstellt, als bei kritischer Dämpfung. Hinzukommt, daß bei anderer Wahl von d_2 die Rechnungen derartig kompliziert werden, daß der zu erwartende Erfolg — eventuell noch etwas kleinere Einstellzeit des Gesamtsystems — die aufzuwendende Mühe nicht lohnt.

Die Lösungen für die Gl. (4a) und (4c) findet man durch Lösung der Gl. (4d); deren rechte Seite stellt die Summe aus zwei Gliedern dar und wegen der Linearität der Differentialgleichung setzt sich dann die Lösung additiv zusammen aus den Lösungen der beiden Gleichungen:

$$\alpha_3'' + 2\alpha_3' + \alpha_3 = \frac{\alpha_0}{2\sqrt{d_1^2-1}} e^{-\frac{d_1}{a} \tau} (\sqrt{d_1^2-1} + d_1) e^{\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a} \tau},$$

$$\alpha_3'' + 2\alpha_3' + \alpha_3 = \frac{\alpha_0}{2\sqrt{d_1^2-1}} e^{-\frac{d_1}{a} \tau} (\sqrt{d_1^2-1} - d_1) e^{-\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a} \tau}.$$

Ein partikuläres Integral der ersten dieser Differentialgleichungen findet man durch den Ansatz:

$$\alpha_3 = A \cdot \frac{e^{-\frac{d_1}{a} \tau}}{2\sqrt{d_1^2-1}} (\sqrt{d_1^2-1} + d_1) e^{\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a} \tau},$$

Bei der zweiten führt ein entsprechender Ansatz zum Ziel:

$$\alpha_3 = B \cdot \frac{e^{-\frac{d_1}{a} \tau}}{2\sqrt{d_1^2-1}} (\sqrt{d_1^2-1} - d_1) e^{-\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a} \tau},$$

Aus diesen beiden Ansätzen ergibt sich ein partikuläres Integral der Gl. (4d) zu:

$$\alpha_2 = \alpha_0 \frac{a^3 e^{-\frac{d_1}{a}\tau}}{2\sqrt{d_1^2-1}} \left[\frac{\sqrt{d_1^2-1} + d_1}{(a-d_1+\sqrt{d_1^2-1})^2} e^{\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a}\tau} + \frac{\sqrt{d_1^2-1} - d_1}{(a-d_1-\sqrt{d_1^2-1})^2} e^{-\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a}\tau} \right].$$

In bekannter Weise findet man schließlich das vollständige Integral der Differentialgleichung (4d) mit den Anfangsbedingungen, daß für $\tau = 0$ $\alpha_2 = \alpha_0$ und $\alpha_2' = 0$ sein soll:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_0 e^{-\tau}}{(a^2 - 2ad_1 + 1)^2} [1 + 3a^2 - 4ad_1 + \tau(1 + a^2 - 2ad_1)] + \frac{\alpha_0 a^3}{2\sqrt{d_1^2-1}} e^{-\frac{d_1}{a}\tau} \left[\frac{\sqrt{d_1^2-1} + d_1}{(a-d_1+\sqrt{d_1^2-1})^2} e^{\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a}\tau} + \frac{\sqrt{d_1^2-1} - d_1}{(a-d_1-\sqrt{d_1^2-1})^2} e^{-\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a}\tau} \right].$$

Aus dieser Gleichung erhält man als Lösungen der Gl. (4a) und (4c):

für $d_1 < 1$

$$(5a) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{\alpha_0 e^{-\tau}}{(1+a^2-2ad_1)^2} [1 + 3a^2 - 4ad_1 + \tau(1 + a^2 - 2ad_1)] \\ &+ \frac{\alpha_0 a^3}{\sqrt{1-d_1^2}(1+a^2-2ad_1)} e^{-\frac{d_1}{a}\tau} \sin \left(\frac{\sqrt{1-d_1^2}}{a} \tau + \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 \right) \\ \text{mit } \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= \frac{\sqrt{1-d_1^2}}{d_1}; \quad \operatorname{tg} 2\varepsilon_2 = \frac{2(a-d_1)\sqrt{1-d_1^2}}{a^2-2ad_1+2d_1^2-1}, \end{aligned} \right.$$

für $d_1 > 1$

$$(5c) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{\alpha_0 e^{-\tau}}{(1+a^2-2ad_1)^2} [1 + 3a^2 - 4ad_1 + \tau(1 + a^2 - 2ad_1)] \\ &+ \frac{\alpha_0 a^3}{\sqrt{d_1^2-1}(1+a^2-2ad_1)} e^{-\frac{d_1}{a}\tau} \sin \left(\frac{\sqrt{d_1^2-1}}{a} \tau + \varepsilon_1' - 2\varepsilon_2' \right) \\ \text{mit } \operatorname{tg} \varepsilon_1' &= \frac{\sqrt{d_1^2-1}}{d_1}, \quad \operatorname{tg} 2\varepsilon_2' = \frac{2(a-d_1)\sqrt{d_1^2-1}}{a^2-2ad_1+2d_1^2-1}. \end{aligned} \right.$$

Die Gl. (4b) wird gelöst durch den Ansatz:

$$\alpha_2 = \alpha_0 (B + C\tau) e^{-\frac{1}{a}\tau}.$$

Bei denselben Anfangsbedingungen wie bisher ergibt sich als vollständige Lösung:

$$(5b_1) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_2 = \frac{\alpha_0}{(1-a)^2} \left\{ e^{-\tau} [1 - 3a^2 + \tau(1-a)] \right. \\ \left. + e^{-\frac{\tau}{2}} [3a^2 - a^2 + \tau a(1-a)] \right\} \end{aligned} \right.$$

Wie man sieht, muß man hier jedoch den Fall $a=1$ ausschließen. Für diesen lautet die Lösung, die mit Hilfe des Ansatzes $\alpha_2 = f(\tau) \cdot e^{-\tau}$ leicht gefunden wird:

$$(5b_2) \quad \alpha_2 = \alpha_0 e^{-\tau} \left(1 + \tau + \frac{1}{2} \tau^2 + \frac{1}{6} \tau^3 \right)$$

3. Diskussion

Aus den Gl. (5a) bis (5c) kann für jedes Frequenzverhältnis a der Galvanometer und für jede Dämpfung d_1 des ersten Galvano-

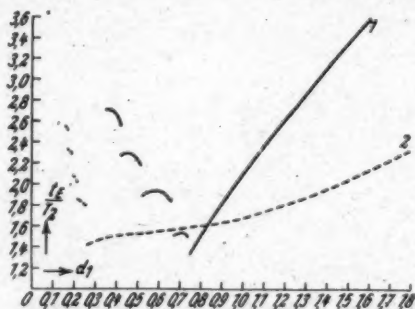


Abb. 1. Die Einstellzeit eines Doppelgalvanometers in Abhängigkeit von der Dämpfung d_1 des ersten Galvanometers bei kritischer Dämpfung des zweiten Galvanometers, für die beiden Schwingungsdauerverhältnisse der Galvanometer

$$1: a = \frac{T_1}{T_2} = 1; \quad 2: a = \frac{T_1}{T_2} = 0,5$$

meters bei kritischer Dämpfung des zweiten Galvanometers der Einstellvorgang berechnet werden und insbesondere die dimensionslose „Einstellzeit“ $\tau = \tau_E$ für eine vorgegebene Toleranz α_2/α_0 . Trägt man dann τ_E oder, was den Überblick erleichtert, $\frac{\tau_E}{2\pi} = \frac{t_E}{T_2}$ (wo t_E die wirkliche Einstellzeit ist) in Abhängigkeit von d_1 auf, so erhält man für jeden Wert von a eine Kurve, ähnlich der, die für ein einzelnes Galvanometer von Ising berechnet worden ist. Abb. 1 zeigt sie für $a=1$ und $a=\frac{1}{2}$, also für gleiche Schwingungszeiten der Galvanometer bzw. für den Fall, daß das Sekundärgalvanometer eine doppelt so große Schwingungsdauer hat wie das erste. Aus diesen

Kurven erkennt man, daß es für jede Kombination zweier Galvanometer eine minimale Einstellzeit $t_E = t_m$ gibt, die bei einer von der kritischen unter Umständen recht stark abweichenden Dämpfung des ersten Galvanometers erreicht wird. Die minimale Einstellzeit ist für die beiden Werte $a = 1$ und $a = \frac{1}{2}$ an der Stelle des ersten Sprungpunktes abzulesen. Bis zu dieser Stelle nimmt die Einstellzeit mit kleiner werdender Dämpfung des ersten Galvanometers monoton ab. Daß dies aber nicht für alle Werte von a der Fall ist, zeigen die Kurven 1—3 der Abb. 2, die für $a = 0,89$; $a = 0,85$ und $a = 0,83$ den Teil der Funktion t_E/T_2 zeigen, der zwischen $d_1 = 1$

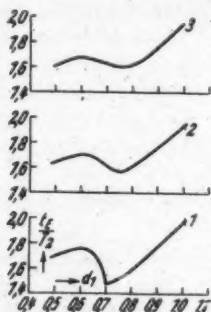


Abb. 2. Die Einstellzeit eines Doppelgalvanometers in Abhängigkeit von der Dämpfung des ersten Galvanometers für die Verhältnisse der Schwingungsdauern 1: $a = 0,89$; 2: $a = 0,85$; 3: $a = 0,83$

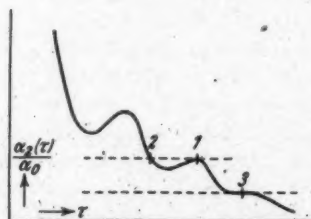


Abb. 3. Schematischer Verlauf einer Einstellkurve bei unterkritischer Dämpfung. Unstetigkeit der Einstellzeit bei 1—3

und dem ersten Sprungpunkt liegt. Um diese eigenartigen Kurven zu verstehen, muß man sich über die Entstehung der Unstetigkeiten der Funktion t_E/T_2 klar werden. Sie haben dieselbe Ursache wie die entsprechenden Unstetigkeiten in der schon mehrfach erwähnten von Ising berechneten Kurve für ein einzelnes Galvanometer: Solange die Gerade $\frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{1}{1000}$ die Funktion $\frac{\alpha_2(t)}{\alpha_0}$ schneidet, ist t_E und mithin auch t_E/T_2 eindeutig bestimmt. Es kommt jedoch für jedes Frequenzverhältnis a bei gewissen Werten von d_1 vor, daß diese Gerade die Funktion $\frac{\alpha_2(t)}{\alpha_0}$ in einem Punkt schneidet und außerdem noch in einem späteren Zeitpunkt berührt (Abb. 3). Für diese Dämpfung springt die Einstellzeit von dem kleineren Wert bei dem obengenannten Schnittpunkt auf den größeren Wert bei dem

Berührungspunkt. Die Größe dieses Sprunges ist, genau wie bei einem einzelnen Galvanometer, bestimmt durch die Zeitdifferenz zwischen dem Punkt, in dem die Einstellkurve von der Geraden $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1000}$ tangiert wird (Abb. 3, Punkt 1) und dem früheren Punkt, in dem die Kurve von dieser Geraden zum letztenmal geschnitten wird (Abb. 3 Punkt 2). Im Gegensatz zu der eines einzelnen Galvanometers hat aber im allgemeinen die Einstellkurve eines Doppelgalvanometers nicht nur Maxima und Minima, sondern auch Wendepunkte (Abb. 3, Punkt 3). Es kann nun für bestimmte Werte von a und d_1 vorkommen, daß die Gerade $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1000}$ die Einstellkurve gerade in einem solchen Wendepunkt berührt. Dann fallen die Punkte 1 und 2 in der Abb. 3 in dem einen Punkt 3 zusammen und die Funktion t_E/T_2 hat für diesen Wert von a an der betreffenden Stelle keinen Sprung, sondern nur eine Ecke (Abb. 2, Kurve 1). Bis zu der Dämpfung, bei der dieser Fall eintritt, nimmt t_E/T_2 mit kleiner werdender Dämpfung monoton ab. Wird die Dämpfung weiter verkleinert, so nimmt t_E/T_2 zunächst zu, aber schließlich, nachdem es durch ein Maximum gegangen ist, bis zum Sprungpunkt wieder ab. Der bei genügend kleinem d_1 wieder auftretende Sprungpunkt hat natürlich die oben dargelegte Ursache.

Allé diese Überlegungen gelten für ein vorgewähltes Frequenzverhältnis a der Galvanometer. Wird jetzt der Wert von a etwas kleiner gewählt (Abb. 2, Kurve 2), so hat die Funktion t_E/T_2 keine Ecke mehr, sondern geht durch ein Minimum im üblichen Sinn. Dieses Verhalten kann anschaulich nicht mehr in so einfacher Weise erklärt werden, was allerdings wohl auch kaum notwendig ist. Hier sei nur soviel gesagt, daß ein solches Minimum immer dann auftritt, wenn der Wendepunkt in der Funktion $\frac{a_2(a)}{a_1}$ nicht gerade bei $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1000}$, sondern darüber liegt. Verkleinert man den Wert von a noch weiter, so wird dieses Minimum ebenso wie das bei kleinerer Dämpfung d_1 liegende Maximum der Funktion t_E/T_2 immer flacher, während gleichzeitig der erste Sprungpunkt immer mehr nach kleineren Werten von d_1 und von t_E/T_2 rückt. Schließlich gibt es einen Wert von a , bei dem t_E/T_2 beim ersten Sprungpunkt denselben Wert hat wie bei dem Minimum (Abb. 2, Kurve 3). Bei noch kleinerem a wird die kürzeste Einstellzeit wieder am Sprungpunkt der Funktion t_E/T_2 erreicht. Dabei ist im Grenzfall der Kurve 3 dasselbe t_E/T_2 für zwei verschiedene Dämpfungen vorhanden.

Trägt man jetzt die minimale Einstellzeit in Abhängigkeit von a auf (Abb. 4), so wird diese Funktion für jenen Wert von a eine

Ecke haben, für den die minimale Einstellzeit sich wie in Abb. 2, Kurve 3 verhält. An derselben Stelle wird die Kurve, die die

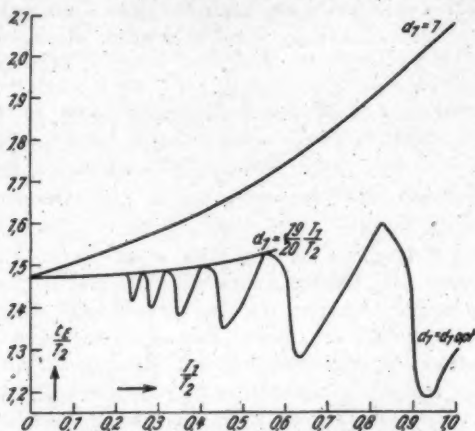


Abb. 4. Die Einstellzeit eines Doppelgalvanometers bei verschiedenen Dämpfungen des Primärgalvanometers in Abhängigkeit vom Verhältnis der Schwingungsdauern der Galvanometer
 1: $d_1 = d_{1\text{opt}}$ = der zum Erreichen kleinstmöglicher Einstellzeit des Doppelgalvanometers notwendigen Dämpfung des ersten Galvanometers;

$$2: d_1 = \frac{19}{20} \alpha = \frac{19}{20} \frac{T_1}{T_2}; \quad 3: d_1 = 1$$

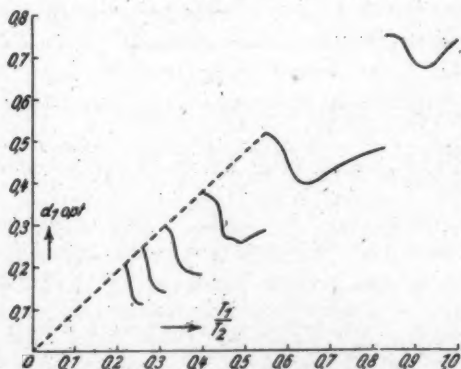


Abb. 5. Die zur kürzestmöglichen Einstellzeit eines Doppelgalvanometers notwendige Dämpfung $d_{1\text{opt}}$ des ersten Galvanometers in Abhängigkeit vom Schwingungsdauerverhältnis T_1/T_2 der Galvanometer

Dämpfung bei der kleinsten Einstellzeit ($d_{1\text{opt}}$) als Funktion von a zeigt (Abb. 5), einen Sprung haben.

Wie man aus Abb. 4 sieht, kann bei jeder Kombination zweier Galvanometer eine Einstellzeit erreicht werden, die kleiner ist als die Einstellzeit bei kritischer Dämpfung beider Galvanometer. Der Unterschied zwischen diesen beiden Einstellzeiten ist für wenig von 1 verschiedene Frequenzverhältnisse recht erheblich. Aus Abb. 5 kann man die Dämpfung des ersten Galvanometers entnehmen, bei der die kürzeste Einstellzeit des Gesamtsystems erreicht wird: Je stärker verschieden die Schwingungsdauern der Galvanometer sind,

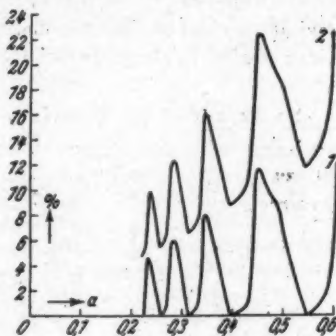


Abb. 6. Ordinate: Die Vergrößerung der Einstellzeit eines Doppelgalvanometers bei den Dämpfungen 1: $d_1 = \frac{19}{20}$ bzw. 2: $d_1 = 1$ gegenüber der kürzestmöglichen Einstellzeit in Prozent der kürzestmöglichen Einstellzeit

Abzisse: Verhältnis der Schwingungsdauern der Galvanometer $a = \frac{T_1}{T_2}$

desto geringer muß die Dämpfung des ersten Galvanometers gewählt werden.

Verbindet man in Abb. 5 die oberen Sprungpunkte der Funktion $d_{1\text{opt}}$ miteinander, so wird die Verbindungslinie für $a < 0,55$ mit großer Annäherung durch die Gerade $d_1 = \frac{19}{20} a$ dargestellt. Dieser Dämpfung entspricht in der Abb. 4 die Einstellzeit, die die Eckpunkte der Kurve miteinander verbindet, die die kleinstmögliche Einstellzeit in Abhängigkeit von a zeigt. Diese beiden Kurven der Abb. 4 und 5 haben insofern eine gewisse Bedeutung, als es praktisch in vielen Fällen kaum möglich sein wird, die optimale

Dämpfung d_1 opt. genau einzustellen, weil für $a < 0,5$ sich die optimale Dämpfung sehr oft bei einer kleinen Änderung von a selbst stark ändert. Es dürfte aber vielfach genügen, die durch die Gerade $d_1 = \frac{19}{20} a$ gegebene Dämpfung einzustellen und dadurch wenigstens angenähert die kürzestmögliche Einstellzeit zu erhalten¹⁾. Daß durch diese Wahl von d_1 in der Tat die Einstellzeit nur unwesentlich vergrößert wird, geht aus Abb. 6 hervor, die die Vergrößerung der Einstellzeit gegenüber der kürzestmöglichen für $a < 0,6$ zeigt, wenn man für d_1 nicht die optimale Dämpfung wählt, sondern $d_1 = \frac{19}{20} a$ bzw. $d_1 = 1$. Aus Abb. 6 kann man weiter das, übrigens zu erwartende, Resultat entnehmen, daß für kleine a auch kritische Dämpfung des ersten Galvanometers die Einstellzeit nicht stark vergrößert.

4. Experimentelle Prüfung

Um die theoretisch gewonnenen Ergebnisse in einem speziellen Fall experimentell zu prüfen, wurde der Einstellvorgang eines Doppelgalvanometers registriert. Als Primärgalvanometer diente ein

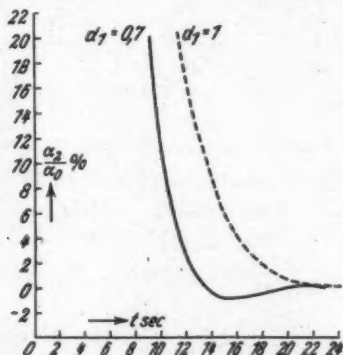


Abb. 7. Registrierte Einstellkurven eines Doppelgalvanometers mit dem Verhältnis der Schwingungsdauern $a = 0,89$ und den Dämpfungen $d_1 = 0,7$ und $d_1 = 1$

Spiegelgalvanometer mit 12,9 Sek. Schwingungsdauer, als Sekundärgalvanometer ein solches mit 14,5 Sek. Schwingungsdauer, so daß $a = 0,89$ ist. Zur Verstärkung der Ausschläge des Primärgalvanometers wurde

¹⁾ Eine kleinere Dämpfung als die optimale zu wählen, ist ungünstiger wegen der stärkeren Heraussetzung der Einstellzeit (vgl. z. B. Abb. 1).

eine Anordnung benutzt ähnlich der von Pfund¹⁾ angegebenen. Das Ergebnis ist in Abb. 7 dargestellt. Man erkennt, daß bei einer Toleranz von $\frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{1}{100}$ die Einstellzeit für $d_1 = 1$ 19,2 Sek., für $d_1 = 0,7$ dagegen nur 12,8 Sek. groß ist. Dabei braucht aber $d_1 = 0,7$ noch nicht einmal die für $\frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{1}{100}$ günstigste Dämpfung zu sein. Welches die hierfür günstigste Dämpfung ist, könnte eine für die Toleranz 1/100 durchgeführte Rechnung zeigen, auf die hier verzichtet wird, da die Berechnung sehr kompliziert ist und das Wesentliche schon bei der Dämpfung $d_1 = 0,7$ erkannt werden kann. Für die Toleranz 1/1000, die den obigen Rechnungen zugrunde gelegt worden ist, können aus den Kurven keine sicheren Werte entnommen werden, weil sowohl das zur Verfügung stehende Primärgalvanometer als auch die Lampe der Verstärkeranordnung Schwankungen im Sekundärgalvanometer hervorriefen, deren mittlere Größe nicht unter 1/1000 des Anfangsauschlages gehalten werden konnte. Jedoch ist deutlich zu sehen, daß die Kurve für $d_1 = 1$ den Wert $\frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{1}{1000}$ erst wesentlich später erreichen wird, als es für $d_1 = 0,7$ der Fall ist.

Daß übrigens aus dem Verhalten für die Toleranzen 1/1000 und 1/100 keineswegs auf das für dazwischenliegende Toleranzen geschlossen werden kann, ersieht man u. a. daraus, daß für $\frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{2}{1000}$ die gleiche Einstellzeit für die beiden Kurven herauskommt, während für $d_1 = 0,7$ sowohl größere als auch kleinere Toleranzen zu kleinerer Einstellzeit im Vergleich zu $d_1 = 1$ führen. Hier gelangt man nur durch genaue Berechnungen nach dem Muster der hier durchgeführten zum Ziel. Unter Umständen ist aber der Gewinn an Einstellzeit so groß, daß sich eine genaue Berechnung lohnt.

5. Zusammenfassung

Der Einstellvorgang eines Doppelgalvanometers wird berechnet; die kürzestmögliche Einstellzeit wird stets bei unterkritischer Dämpfung des Primärgalvanometers erreicht, wenn man als Primärgalvanometer das mit kürzerer Schwingungsdauer wählt.

Für die Toleranz $\frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{1}{1000}$ wird bei den beiden Schwingungsdauerverhältnissen $a = 1$ und $a = 0,5$ die Einstellzeit in Abhängigkeit von der Dämpfung d_1 des Primärgalvanometers bestimmt. Des-

1) A. H. Pfund, Science 69. S. 71. 1929.

gleichen wird für jedes Verhältnis der Schwingungsdauern die Einstellzeit bei verschiedenen Dämpfungen des ersten Galvanometers, insbesondere die kürzestmögliche Einstellzeit berechnet und dargestellt, sowie die zum Erreichen dieser kürzestmöglichen Einstellzeit notwendige Dämpfung $d_{1\text{opt}}$ des ersten Galvanometers. Die kürzestmögliche Einstellzeit kann unter Umständen auf nur etwa 60% der für kritische Dämpfung beider Galvanometer vorhandenen herabgesetzt werden.

An zwei experimentell gefundenen Einstellkurven werden die prinzipiellen Ergebnisse der Überlegungen qualitativ verifiziert.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit habe ich Herrn Professor Dr. F. Matossi zu verdanken. Desgleichen bin ich ihm für die stete Förderung der Arbeit und für viele klärende Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Graz, II. Physikalisches Institut der Universität, Juni 1942.

(Eingegangen 3. Juli 1942)

Über die Meßgrenze bei Benutzung eines Doppelgalvanometers

Von G. Passoth

(Mit 6 Abbildungen)

1. Einleitung

Seit es gelungen ist, mit Hilfe von Relaismethoden^{1) 2)} die Ausschläge eines Galvanometers praktisch beliebig hoch verstärkt durch ein zweites Galvanometer zu beobachten, sind wiederholt Untersuchungen über die untere Grenze, bis zu der Ströme und Spannungen gemessen werden können, veröffentlicht worden. Diese Grenze ist bestimmt durch die Bewegung des Galvanometers, die dieses unter der Wirkung der Brownschen Bewegung der das Meßsystem umgebenden Luftmoleküle bzw. der zufälligen Spannungsschwankungen im Stromkreis des Galvanometers ausführt. Es hat nicht an Versuchen gefehlt, die genannte Grenze für die Messung kleiner Ströme und Spannungen durch Benutzung eines Doppelgalvanometers zu unterschreiten³⁾. Berücksichtigt man die bei jenen Versuchen verlängerte Einstellzeit des Gesamtsystems, so läßt sich aber nachweisen⁴⁾, daß mit einem einzigen Galvanometer gleicher Empfindlichkeit bei geeigneter Beobachtungsweise genau so kleine Ströme und Spannungen gemessen werden können wie z. B. bei der zitierten Methode Hardys. Es sind auch noch andere Spezialfälle der Zusammenstellung zweier Galvanometer zu einem Doppelgalvanometer untersucht worden⁵⁾, doch ist das Ergebnis stets dasselbe geblieben, daß nämlich mit einem Doppelgalvanometer prinzipiell dieselbe Grenze erreicht wird wie mit einem einzigen Galvanometer genügender Empfindlichkeit. Dadurch ist Firestone⁵⁾ zu der Vermutung gekommen, daß die Meßgrenze durch Benutzung eines Doppelgalvanometers überhaupt nicht herabgesetzt werden könnte. In einem bisher nicht diskutierten Spezialfall kann dieses aber offenbar doch möglich sein: In dem

1) W. J. H. Moll u. H. C. Burger, Phil. Mag. 50. S. 626. 1925.

2) L. Bergmann, Phys. Ztschr. 33. S. 824. 1932; R. B. Barnes u. F. Matossi, Ztschr. f. Phys. 76. S. 24. 1932.

3) J. O. Hardy, Rev. Scient. Instr. 1. S. 420. 1930.

4) F. Zernike, Ztschr. f. Phys. 79. S. 516. 1932.

5) F. A. Firestone, Rev. Scient. Instr. 3. S. 163. 1932.

Fall nämlich, daß das erste Galvanometer der benutzten Relaisanordnung eine sehr kleine Schwingungsdauer gegenüber der des zweiten Galvanometers besitzt, und das erste Galvanometer unterkritisch, das zweite dagegen etwa kritisch gedämpft ist. Daß mit einer solchen Anordnung die Grenze herabgedrückt werden kann, beruht auf der Tatsache, daß zwar nicht die mittlere Größe, wohl aber die Form der Brownschen Bewegung eines Galvanometers von der Dämpfung des Galvanometers abhängt. Und zwar trägt diese Bewegung einen desto stärker periodischen Charakter, je schwächer das Galvanometer gedämpft ist. Im zweiten Galvanometer werden dann von dieser periodischen Bewegung erzwungene Schwingungen erzeugt, die nur sehr kleine Amplituden haben, da man ja nach Voraussetzung vom Resonanzfall weit entfernt ist¹⁾. Während nun die Einstellzeit des Gesamtsystems in diesem Fall auch bei sehr schwacher Dämpfung des ersten Galvanometers kaum über die Einstellzeit des zweiten kritisch gedämpften Galvanometers hinausgeht, wird also die vom ersten im zweiten Galvanometer erzwungene Bewegung desto schwächer sein, je schwächer das erste Galvanometer gedämpft ist. Nun ist allerdings im allgemeinen die Empfindlichkeit eines Galvanometers desto geringer, je geringer die Dämpfung ist, und deshalb ist die in erster Linie interessierende Strom- bzw. Spannungsschwankung, die einer bestimmten Winkelschwankung des Galvanometers entspricht, desto größer, je kleiner die Dämpfung ist. Es ist aber nicht ohne weiteres zu übersehen, welche von den beiden Komponenten, die die Strom- bzw. Spannungsschwankung in einem Doppelgalvanometer bestimmen — die Winkelschwankung des zweiten oder die Empfindlichkeit des ersten Galvanometers —, schneller mit der Dämpfung abnimmt. Es soll daher im folgenden eine genaue Behandlung dieser Einflüsse durchgeführt werden.

2. Die Fourierrelegung der Schwankung des ersten Galvanometers

Um die mittlere Ausschlagsschwankung des zweiten Galvanometers im Winkelmaß zu berechnen, geht man am einfachsten so vor, daß man die Bewegung des ersten Galvanometers nach Fourier zerlegt, dann die Amplitude der durch jede Fourierkomponente erzwungenen Schwingung des zweiten Galvanometers berechnet und schließlich die quadratischen Mittelwerte aller dieser Schwingungen addiert, wodurch man den quadratischen Mittelwert der Schwankung des zweiten Galvanometers erhält.

1) Schottky hat für einen entsprechenden Fall bei dem Nachweis des Schroteffekts eine überschlägige Überlegung mit dem gleichen Ergebnis durchgeführt. Vgl. W. Schottky, *Ann. d. Phys.* 57. S. 541. 1918.

Die Schwankungen des ersten Galvanometers werden hervorgerufen 1. durch die Spannungsschwankungen im Stromkreis des Galvanometers und 2. durch die Kräfte, die von den das Meßsystem — bei Drehspulgalvanometern, auf die wir uns beschränken, also die Spule — umgebenden Luftmolekülen auf dieses ausgeübt werden. Die Bewegung der ersten Galvanometerspule ist dann bestimmt durch das System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\Phi_1 \ddot{\alpha}_1 + f_1 \dot{\alpha}_1 + D_1 \alpha_1 + B_1 J_1 &= K(t), \\ L_1 \ddot{J}_1 + R_1 J_1 - B_1 \alpha_1 &= E(t),\end{aligned}$$

darin bedeuten:

α_1 = Drehwinkel der Galvanometerspule,

Φ_1 = Trägheitsmoment der Galvanometerspule,

f_1 = Luftdämpfung,

D_1 = Direktionskraft = $\Phi_1 \omega_1^2$,

B_1 = dynamische Galvanometerkonstante,

J_1 = Strom, der durch die Galvanometerspule fließt,

L_1 = Selbstinduktion der Spule,

R_1 = Widerstand des Stromkreises,

$K(t)$ = das von den Luftmolekülen auf die Spule ausgeübte Drehmoment als Funktion der Zeit t ,

$E(t)$ = Spannungsschwankungen im Galvanometerstromkreis als Funktion der Zeit t .

Berücksichtigt man, daß in allen vorkommenden Fällen $L_1 J_1$ zu vernachlässigen ist gegenüber den anderen Größen auf der linken Seite der zweiten Gleichung, so vereinfacht sich das System obiger Gleichungen zu der einen Gleichung

$$(1) \quad \Phi_1 \ddot{\alpha}_1 + \left(f_1 + \frac{B_1^2}{R_1}\right) \dot{\alpha}_1 + D_1 \alpha_1 = K(t) - \frac{B_1}{R_1} E(t);$$

hierin ist f_1 die Luftdämpfung, $\frac{B_1^2}{R_1}$ die elektromagnetische Dämpfung. Dividiert man noch die ganze Gleichung durch Φ_1 und bezeichnet $\frac{1}{\Phi_1} f_1$ mit $2d_{1L}\omega_1$ und $\frac{1}{\Phi_1} \frac{B_1^2}{R_1}$ mit $2d_{1el}\omega_1$, wo ω_1 die ungedämpfte Eigenfrequenz des ersten Galvanometers bedeutet, so vereinfacht sich Gl. (1) zu

$$\ddot{\alpha}_1 + 2(d_{1L} + d_{1el})\omega_1 \dot{\alpha}_1 + \omega_1^2 \alpha_1 = \frac{1}{\Phi_1} \left[K(t) - \frac{B_1}{R_1} E(t) \right].$$

Setzt man zur Abkürzung

$$d_{1L} + d_{1el} = d_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\Phi_1} \left[K(t) - \frac{B_1}{R_1} E(t) \right] = C(t)$$

und zerlegt man weiter $C(t)$ in eine Fourierreihe:

$$C(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \cos \nu_n t + G_n \sin \nu_n t),$$

wo s die Anzahl der Fourierglieder bedeutet, die zur Darstellung der Bewegung des ersten Galvanometers mit einer geforderten Genauigkeit nötig ist, so erhält man für das n -te Fourierglied α_{1n} der Bewegung der Galvanometerspule die Differentialgleichung:

$$\ddot{\alpha}_{1n} + 2d_1\omega_1\dot{\alpha}_{1n} + \omega_1^2\alpha_{1n} = F_n \cos \nu_n t + G_n \sin \nu_n t;$$

deren stationäre Lösung lautet:

$$\alpha_{1n} = \frac{F_n \cos(\nu_n t - \varphi_1)}{\sqrt{(\omega_1^2 - \nu_n^2)^2 + 4d_1^2\omega_1^2\nu_n^2}} + \frac{G_n \sin(\nu_n t - \varphi_1)}{\sqrt{(\omega_1^2 - \nu_n^2)^2 + 4d_1^2\omega_1^2\nu_n^2}}$$

$C(t)$ kann man als eine rein zufällige Größe ansehen. Streng gilt dies zwar nur für den Fall, daß das Gas, in dem sich die Galvanometerspule bewegt, genügend verdünnt ist, weil nur dann die Drehimpulse, die von den Gasmolekülen auf die Spule übertragen werden, in zwei aufeinanderfolgenden Zeitelementen unabhängig voneinander sind. Es ist jedoch festgestellt worden¹⁾, daß die Ergebnisse der auf der Voraussetzung der Unabhängigkeit dieser Drehimpulse beruhenden Rechnungen noch bei Atmosphärendruck mit genügender Genauigkeit gültig sind. Ist nun tatsächlich $C(t)$ eine rein zufällige Funktion von t , so kann man nachweisen²⁾, daß alle F_n und G_n dieselbe Größe haben. Und zwar ergibt sich

$$(2) \quad F_n^2 = G_n^2 = \frac{2}{z} \overline{C(t)^2} \cdot \Delta t,$$

wo z die Beobachtungszeit bedeutet und Δt ein Zeitelement, das dadurch bestimmt ist, daß zur Herleitung der Formel (2) das Integral in

$$F_n = \frac{2}{z} \int_0^z C(t) \cos \nu_n t dt$$

durch eine Summe ersetzt worden ist:

$$F_n = \frac{2}{z} \sum_{p=1}^r C(t_p) \cos \nu_n t_p \Delta t.$$

Es muß also sein:

$$r \cdot \Delta t = z.$$

Auf die Größe von $\overline{C(t)^2}$ kann man aus der Kenntnis des quadratischen Mittelwertes der Drehimpulse

$$\left(\int_0^{\Delta t} C(t) dt \right)^2 = \frac{4d_1\omega_1 k T}{\Phi_1} \Delta t$$

1) G. Ising, Ann. d. Phys. 14. S. 755. 1932.

2) G. E. Uhlenbeck u. S. Goudsmit; Phys. Rev. (2). 34. S. 145. 1929.

3) F. Zernike, Ztschr. f. Phys. 40. S. 628. 1927.

schließen¹⁾. Es ist nämlich:

$$\overline{C(t)^2} = \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} C(t) dt \right)^2 = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{4 d_1 \omega_1 k T}{\Phi_1}.$$

Mithin ist:

$$(3) \quad F_n^2 = G_n^2 = \frac{2}{z} C(t)^2 \cdot \Delta t = \frac{1}{z} \frac{8 d_1 \omega_1 k T}{\Phi_1}.$$

So ergibt sich:

$$\overline{\alpha_{1n}^2} = \frac{F_n^2}{(\omega_1^2 - \nu_n^2)^2 + 4 d_1^2 \omega_1^2 \nu_n^2} = \frac{8 d_1 \omega_1 k T}{z \Phi_1} \cdot \frac{1}{(\omega_1^2 - \nu_n^2)^2 + 4 d_1^2 \omega_1^2 \nu_n^2}.$$

Man rechnet leicht nach, daß, wie es sein muß,

$$\overline{\alpha_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_{1n}^2} = \frac{k T}{D_1}$$

ist; denn nach den vorstehenden Gleichungen ist

$$\overline{\alpha_1^2} = \frac{8 d_1 \omega_1 k T}{z \Phi_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_1^2 - \nu_n^2)^2 + 4 d_1^2 \omega_1^2 \nu_n^2}.$$

Für genügend großes z kann nun die Summe durch ein Integral dargestellt werden, und, weil für große n der Integrand sehr klein wird, kann die obere Grenze des Integrals ∞ gesetzt werden:

$$\overline{\alpha_1^2} = \frac{8 d_1 \omega_1 k T}{z \Phi_1} \cdot \frac{1}{\Delta \nu} \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{(\omega_1^2 - \nu^2)^2 + 4 d_1^2 \omega_1^2 \nu^2}.$$

Das Integral kann nach Partialbruchentwicklung des Integranden ausgewertet werden²⁾. Bedenkt man weiter, daß $\Delta \nu = \nu_0$, der Grundfrequenz der Fourierzerlegung und $\nu_0 = \frac{2\pi}{z}$ ist, so findet man in der Tat

$$(4) \quad \overline{\alpha_1^2} = \frac{8 d_1 \omega_1 k T}{z \Phi_1} \cdot \frac{z}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{4 \omega_1^2 d_1} = \frac{k T}{D_1}.$$

3. Die Schwankung der zweiten Galvanometerspule

Jetzt sei die Bewegung der Spule des zweiten Galvanometers in einer Relaisanordnung betrachtet. Diese bewegt sich unter dem

1) De Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen. S. 51ff. Dort ist jedoch für d_1 ein nur für Luftdämpfung gültiger spezieller Ausdruck eingesetzt worden.

2) Vgl. W. Schottky, Ann. d. Phys. 68. S. 157. 1922.

Einfluß des n -ten Fouriergliedes von α_1 gemäß den Differentialgleichungen¹⁾:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \alpha_{2n} + f_1 \dot{\alpha}_{2n} + D_1 \alpha_{2n} + B_1 J_{2n} &= 0, \\ L_2 J_{2n} + R_2 J_{2n} - B_2 \dot{\alpha}_{2n} &= m \cdot \alpha_{1n}, \end{aligned}$$

wo m ein Proportionalitätsfaktor ist. Berücksichtigt man auch hier wieder, daß in allen vorkommenden Fällen $L_2 J_{2n}$ zu vernachlässigen ist, so ergibt sich wie in Abschn. 2 hieraus die eine Differentialgleichung

$$(5) \quad \alpha_{2n} + \frac{1}{\Phi_1} \left(f_1 + \frac{B_1^2}{R_2} \right) \dot{\alpha}_{2n} + \omega_2^2 \alpha_{2n} = - \frac{m B_1}{R_2 \Phi_1} \alpha_{1n}.$$

Die Konstante m wird aus der Bedingung berechnet, daß bei konstantem Ausschlag des ersten Galvanometers $\alpha_1 = \alpha_0$ auch der Ausschlag des zweiten Galvanometers α_2 konstant sein muß und zwar gleich α_1 multipliziert mit dem Verstärkungsfaktor, der gleich 1 gesetzt sei, was die Allgemeinheit der Rechnung nicht beeinträchtigt:

$$\alpha_2 = \alpha_0 = - \frac{m B_1}{R_2 \Phi_1 \omega_1^2} \alpha_0.$$

Es ist dann also

$$m = - \frac{R_2 \Phi_1 \omega_1^2}{B_1}.$$

Setzt man noch $\omega_2 t = \tau$, differenziert dann nach τ statt nach t , wobei die entsprechenden Differentialquotienten mit α'_{2n} bzw. α''_{2n} bezeichnet werden, und bedenkt man, daß man im Interesse einer möglichst kurzen Einstellzeit des Gesamtsystems das zweite Galvanometer kritisch dämpfen wird ($d_2 = 1$), so geht (5) über in

$$\alpha''_{2n} + 2\alpha'_{2n} + \alpha_{2n} = F_n^2 \frac{\cos\left(\frac{\nu_n}{\omega_1} \tau - \varphi_1\right) + \sin\left(\frac{\nu_n}{\omega_1} \tau - \varphi_1\right)}{\gamma(\omega_1^2 - \nu_n^2)^2 + 4d_1^2 \omega_1^2 \nu_n^2}.$$

Von der Lösung dieser Differentialgleichung interessiert wiederum nur der quadratische Mittelwert des stationären Teiles, erstreckt über die ganze Beobachtungszeit:

$$\overline{\alpha_{2n}^2} = F_n^2 \frac{1}{(\omega_1^2 - \nu_n^2)^2 + 4d_1^2 \omega_1^2 \nu_n^2} \cdot \frac{\omega_2^4}{(\omega_2^2 + \nu_n^2)^2}.$$

In analoger Weise, wie es oben für das erste Galvanometer ausgeführt wurde, ergibt sich jetzt für das zweite Galvanometer der quadratische Mittelwert der vom ersten Galvanometer erzwungenen Schwankung:

$$\overline{\alpha_2^2} = \omega_2^4 F_n^2 \frac{1}{\nu_0} \int_0^\infty \frac{d\tau}{[(\omega_1^2 - \nu_n^2)^2 + 4d_1^2 \omega_1^2 \nu_n^2] (\omega_2^2 + \nu_n^2)^2}.$$

¹⁾ Hier bei kann natürlich von der Brownschen Bewegung des zweiten Galvanometers abgesehen werden.

Auch dieses Integral kann man nach Partialbruchentwicklung des Radikanden auswerten, und wenn man noch $\frac{\omega_2}{\omega_1} = a$ setzt, so findet man

$$\overline{\alpha_2^2} = \frac{\omega_2^2 s F_2^2}{8 \omega_1^4 d_1} \cdot \frac{1}{[(1+a^2)^2 - 4d_1^2 a^2]} \cdot [d_1 \{(1+a^2)^2 - 4d_1^2 a^2\} - 4d_1 a^2 \{2d_1^2 - 1 - a^2\} + a^2 \{(1+a^2)^2 - 4d_1^2 (3 - 4d_1^2 + 2a^2)\}].$$

Dividiert man diese Gleichung noch durch $\overline{\alpha_1^2} = \frac{F_1^2 s}{8 \omega_1^4 d_1}$ [Gl.(3) und (4)], so findet man als Verhältnis des quadratischen Mittelwertes der Schwankung des zweiten Galvanometers zu dem des ersten Galvanometers, beide Schwankungen im Winkelmaß gemessen:

$$(6) \quad \left\{ Q_2^2 = \frac{\overline{\alpha_2^2}}{\overline{\alpha_1^2}} = \frac{a}{[(1+a^2)^2 - 4d_1^2 a^2]} \cdot [d_1 \{(1+a^2)^2 - 4d_1^2 a^2\} - 4d_1 a^2 \{2d_1^2 - 1 - a^2\} + a^2 \{(1+a^2)^2 - 4d_1^2 (3 - 4d_1^2 + 2a^2)\}]. \right.$$

4. Auswertung und Diskussion

Die Auswertung von Gl. (6) bezüglich der Abhängigkeit von a ist praktisch nur auf numerischem Wege möglich. Abb. 1, Kurve 1 gibt den Verlauf von Q_2 in Abhängigkeit von d_1 wieder für den Fall, daß beide Galvanometer die gleiche Schwingungsdauer haben, also für $a = 1$, Kurve 2 desgleichen für $a = \frac{1}{2}$. Beide Kurven zeigen das

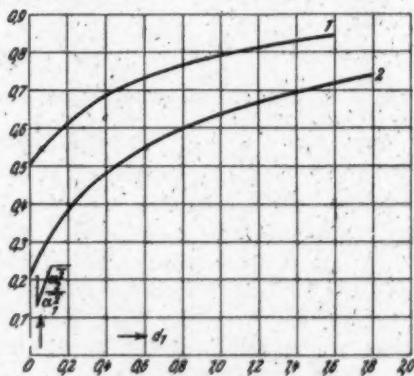


Abb. 1. Verhältnis $Q_2 = \sqrt{\frac{\overline{\alpha_2^2}}{\overline{\alpha_1^2}}}$ der mittleren Winkelschwankungen zweier Galvanometer als Funktion der Dämpfung d_1
 Parameter: $a = \frac{T_1}{T_2} = 1$ (Kurve 1), $a = \frac{1}{2}$ (Kurve 2)
 (T_1, T_2 = Schwingungsdauern der beiden Galvanometer)

zu erwartende Ergebnis: Die erzwungene Schwankung des zweiten Galvanometers nimmt mit kleiner werdender Dämpfung des ersten Galvanometers ab.

Man kann Q_a auch in Abhängigkeit von a mit d_1 als Parameter darstellen (Abb. 2). Dann erkennt man, daß für jeden konstanten Wert der Dämpfung (Kurve 1, 2, 3) das Verhältnis der mittleren Schwankung des zweiten Galvanometers zu der des ersten mit kleiner werdendem a abnimmt. Die Abnahme erfolgt in der Nähe von $a = 0$ etwa parabelförmig, wie es dem Ergebnis der in der Einleitung erwähnten, von Schottky durchgeführten Überlegung entspricht.

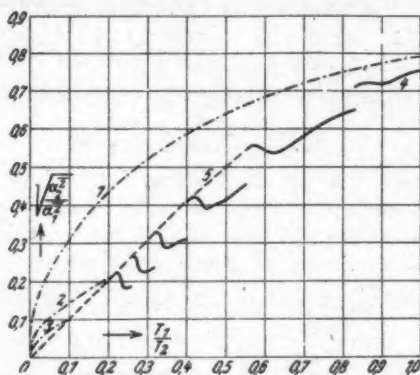


Abb. 2. $Q_a = \sqrt{\frac{a_2^2}{a_1^2}}$ als Funktion von $a = \frac{T_1}{T_2}$

Kurve 1 $d_1 = 1$

Kurve 4 $d_1 = d_{1\text{opt.}}$

Kurve 2 $d_1 = 0,2$

Kurve 5 $d_1 = \frac{19}{20} a$

Kurve 3 $d_1 = 0,1$

Wählt man für d_1 die nicht konstante Dämpfung $d_{1\text{opt.}}$, bei der die kürzeste Einstellzeit des Gesamtsystems erreicht wird [diese ist in einer vorhergehenden Arbeit¹⁾ berechnet worden], dann erhält man Kurve 4 in Abb. 2: Für Werte von $a > 0,55$ ist die Verkleinerung der Schwankung zwar merklich, aber nicht sehr groß; für $a < 0,55$ wird sie mit kleiner werdendem a erheblich. Für experimentelle Zwecke, bei denen es fast stets nur auf die Kenntnis der ungefähren mittleren Schwankung ankommt, genügt es, sich zu merken, daß die Werte von Q_a für $a < 0,6$ sich von der Geraden $Q_a = a$ nur wenig

1) G. Passoth, Ann. d. Phys. [5] 42. S. 35. 1942. Diese Arbeit wird im folgenden mit Arbeit I bezeichnet.

entfernen. Diese Gerade liegt auch sehr nahe an Kurve 5, zu deren Berechnung für d_1 die Funktion $d_1 = \frac{19}{20} a$ zugrunde gelegt worden ist. Die Wahl dieser Dämpfung, bei der, solange $a < 0,55$ bleibt, die Einstellzeit des Gesamtsystems nur wenig gegenüber der kürzesten erhöht ist, ist in Arbeit I begründet worden. Das Verhältnis der mittleren Schwankungen ist bei dieser Wahl von d_1 nur wenig größer als bei optimalem d_1 .

Bisher betrachteten wir nur das Verhältnis der Winkelschwankungen der beiden Galvanometer. Schon in der Einleitung wurde jedoch erwähnt, daß in erster Linie die dieser Winkelschwankung entsprechende Strom- bzw. Spannungsschwankung interessiert. Diese hängen aber von der Empfindlichkeit des ersten Galvanometers und diese wiederum von dessen Dämpfung ab. Es gilt nämlich für die Empfindlichkeit s_J bzw. s_V eines Galvanometers¹⁾

$$(7) \quad \begin{cases} s_J^2 = \frac{\alpha^2}{J^2} = \frac{B}{D} = \frac{2R d_{el.}}{\omega D}, \\ s_V^2 = \frac{\alpha^2}{V^2} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{B}{D} = \frac{2 d_{el.}}{\omega D R}. \end{cases}$$

Es ist also:

$$\overline{J^2} = \overline{\alpha^2} \cdot \frac{\omega D}{2R d_{el.}},$$

$$\overline{V^2} = \overline{\alpha^2} \cdot \frac{\omega D R}{2 d_{el.}}.$$

In einem Fall ist nun $\sqrt{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}} = Q_\alpha$ identisch mit $\sqrt{\frac{J_2^2}{J_1^2}} = Q_J$; dann nämlich, wenn d_1 durch Veränderung von R_1 variiert wird, (d. h. $B_1 = \text{const}$). Dann ist nämlich die Empfindlichkeit des ersten Galvanometers unabhängig von $d_{1el.}$, was daher rührt, daß $d_{1el.}$ für $B_1 = \text{const}$ umgekehrt proportional R_1 ist (Gl. 7). In diesem Fall zeigt Abb. 2 gleichzeitig Q_J in Abhängigkeit von a .

Wird jedoch die Dämpfung d_1 durch Veränderung der dynamischen Galvanometerkonstanten, also durch Veränderung des Magnetfeldes, variiert, dann ist die Empfindlichkeit dämpfungsabhängig. Bedenkt man, daß $d_{1el.} = d_1 - d_{1L}$ ist, so ergibt sich für das zweite Galvanometer

$$\overline{J_2^2} = \frac{\overline{\alpha_2^2}}{s_{1J}^2} = \overline{\alpha_2^2} \cdot \frac{\omega_1 D_1}{2 R_1} \cdot \frac{1}{d_1 - d_{1L}}$$

bzw.

$$\overline{V_2^2} = \frac{\overline{\alpha_2^2}}{s_{1V}^2} = \overline{\alpha_2^2} \cdot \frac{\omega_1 D_1 R_1}{2} \cdot \frac{1}{d_1 - d_{1L}}.$$

1) Vgl. G. Ising, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 911. 1931.

Dabei ist die Empfindlichkeit des Gesamtsystems gleich der des ersten Galvanometers $= s_{1J}$ gesetzt worden, da wir voraussetzen, daß die Gesamtanordnung dieselbe Empfindlichkeit haben soll wie das erste Galvanometer allein. Will man \bar{J}_1^2 nun zur Bildung von Q_J berechnen, so muß man bedenken, daß man durch Benutzung eines Doppelgalvanometers bezüglich der Strom- oder der Spannungsschwankungen nur dann Vorteile ziehen kann, wenn das zweite Galvanometer kleinere Schwankungen zeigt als sie das erste Galvanometer allein bei einer Einstellzeit haben würde, die gleich ist der Einstellzeit des Doppelgalvanometers. Nun kann aber eine bestimmte

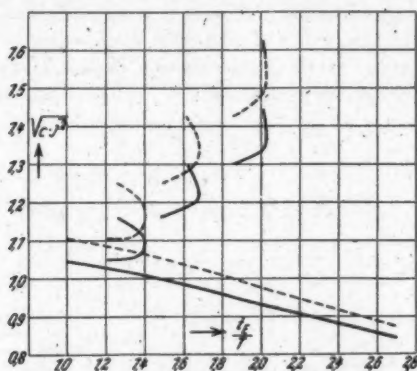


Abb. 3. Mittlere Stromschwankung des Galvanometers als Funktion

der reduzierten Einstellzeit t_E/T (t_E = wahre Einstellzeit;

T = Schwingungsdauer des Galvanometers; $c = \frac{R}{\pi DT}$; R = Widerstand des Stromkreises; D = Direktionskraft) bei verschiedener Luftdämpfung
 ——— $d_{1L} = 0$ - - - - $d_{1L} = 0,1$

Einstellzeit des ersten Galvanometers fast immer durch zwei oder auch drei verschiedene Dämpfungen erreicht werden¹⁾, einer unterkritischen und einer im allgemeinen überkritischen. Wegen der Abhängigkeit der Empfindlichkeit von d_{1L} gibt es dann aber auch zu jeder Einstellzeit zwei verschiedene Größen der mittleren Stromschwankung des ersten Galvanometers (Abb. 3). Bei der Berechnung von \bar{J}_1^2 muß man naturgemäß den für den Vergleich ungünstigsten Fall heranziehen, bei dem schon das erste Galvanometer eine möglichst kleine Schwankung hat; man wählt also für d_1 die zur gewählten

1) G. Ising, a. a. O.

Einstellzeit gehörige überkritische bzw. nahezu kritische Dämpfung¹⁾. Bezeichnet man diese mit $d'_1 = d'_{1L} + d_{1L}$ (natürlich ist $d'_{1L} = d_{1L}$), so ist

$$J_1^2 = \alpha_1^2 \cdot \frac{\omega_1 D_1}{2 R_1} \cdot \frac{1}{d'_1 - d_{1L}}$$

bzw.

$$V_1^2 = \alpha_1^2 \cdot \frac{\omega_1 D_1 R_1}{2} \cdot \frac{1}{d'_1 - d_{1L}}$$

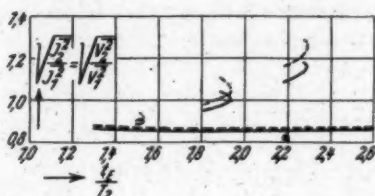


Abb. 4. $Q_J = \sqrt{\frac{J_2^2}{J_1^2}}$ als Funktion der reduzierten Einstellzeit für $\alpha = \frac{T_1}{T_2} = 1$
 ——— $d_{1L} = 0$ - - - - $d_{1L} = 0,1$

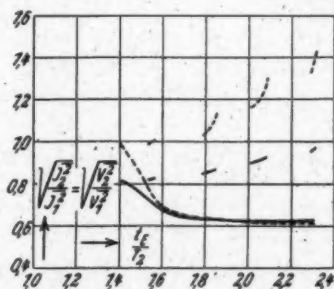


Abb. 5. $Q_J = \sqrt{\frac{J_2^2}{J_1^2}}$ als Funktion der reduzierten Einstellzeit für $\alpha = \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$
 ——— $d_{1L} = 0$ - - - - $d_{1L} = 0,1$

Man erhält so:

$$(8) \quad Q_J^2 = \frac{J_2^2}{J_1^2} = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \cdot \frac{d'_1 - d_{1L}}{d_1 - d_{1L}}$$

Hieraus läßt sich unter Verwendung von Abb. 2 $\left(\frac{t_E}{T_2} = f(d_1)\right)$ der Arbeit I Q_J als Funktion der dimensionslosen reduzierten Einstell-

1) Dem entspricht in Abb. 3 der untere Ast.

zeit t_E/T_2 , wo t_E die wirkliche Einstellzeit ist, darstellen mit a als Parameter. Man erhält dann für $a = 1$ und $a = \frac{1}{2}$ die Abb. 4 und 5. In den Abbildungen sind jeweils die Fälle verschwindender bzw. zu vernachlässigender Luftdämpfung ($d_{1L} = 0$) und $d_{1L} = 0,1$ auseinandergehalten. Offenbar muß die Luftdämpfung dann berücksichtigt werden, wenn die für eine bestimmte Einstellzeit des Gesamtsystems notwendige Dämpfung d_1 so kleine Werte annimmt, daß die Luftdämpfung einen bemerkenswerten Bruchteil von ihr ausmacht.

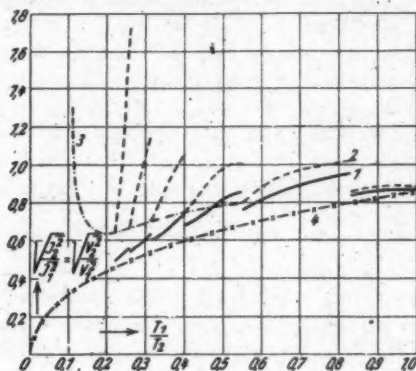


Abb. 6. $Q_J = \sqrt{\frac{J_2^2}{J_1^2}}$ als Funktion von $a = \frac{T_1}{T_2}$.

Kurve 1 ————— $d_1 = d_{1\text{opt.}}, d_{1L} = 0$

Kurve 2 - - - - - $d_1 = d_{1\text{opt.}}, d_{1L} = 0,1$

Kurve 3 - · - · - · $d_1 = \frac{19}{20} a, d_{1L} = 0,1$

Kurve 4 - x - x - $d_1 = 1, d_{1L} < 1$

In erster Linie wichtig ist der Wert von Q_J an der Stelle der kürzesten Einstellzeit des Gesamtsystems, für $a = 1$ also an der Stelle $\frac{t_E}{T_2} = 1,298$, für $a = \frac{1}{2}$ an der Stelle $\frac{t_E}{T_2} = 1,403$. Berechnet man die entsprechenden Werte auch für die anderen Schwingungsdauerverhältnisse der beiden Galvanometer, so erhält man Abb. 6, Kurve 1 für die Luftdämpfung $d_{1L} = 0$ bzw. Kurve 2 für die Luftdämpfung $d_{1L} = 0,1$. Für größere Werte von a , nämlich etwa für $a > 0,55$ spielt offenbar die Berücksichtigung der Luftdämpfung nur eine sehr geringe Rolle. Für kleinere Werte von a

wächst dagegen Q_J bei endlicher Luftdämpfung bald stark an, entgegen dem Verhalten bei $d_{1L} = 0$. Das hat den Grund, daß die elektromagnetische Dämpfung und mit ihr die Empfindlichkeit für kleine Werte von a sehr stark verringert werden muß, wenn die kleinstmögliche Einstellzeit erreicht werden soll. Auch wenn man für d_1 etwas größere Werte als $d_{1\text{opt}}$ wählt, nämlich die Werte auf der Verbindungslinie der Sprungpunkte in der Funktion $d_{1\text{opt}} = f(a)$ (Abb. 5 in der Arbeit I), ist das Ansteigen von Q_J für kleine a nicht zu vermeiden (Kurve 3), wenn man die Luftdämpfung berücksichtigt. Allerdings erfolgt der Anstieg erst bei erheblich kleineren Werten von a als bei $d_{1\text{opt}}$. Dieses Ergebnis hat insofern eine gewisse Bedeutung, als bei jener Wahl von d_1 die Einstellzeit des Gesamtsystems nicht nennenswert größer ist als bei optimaler Dämpfung (Abb. 4 in Arbeit I).

Noch günstiger sind die Ergebnisse bezüglich der Schwankungen, wenn man zur Berechnung von \bar{J}_1^2 $d_1 = 1$ setzt. Dann ist nämlich die Luftdämpfung in allen praktischen Fällen zu vernachlässigen, und man erhält für $\sqrt{\frac{J_1}{J_1}}$ die Kurve 4 in Abb. 6. Allerdings ist für $d_1 = 1$ die Einstellzeit auch für $a < 0,55$ etwas größer als für $d_{1\text{opt}}$, doch wird diese Vergrößerung (Abb. 6 in Arbeit I) in vielen Fällen, besonders für kleine a in Kauf genommen werden können. Man erkennt aus der Kurve 4 (Abb. 6), daß die Strom- bzw. Spannungsschwankungen ebenso wie die Winkelschwankungen desto stärker unterdrückt werden können, je größer der Unterschied in den Schwingungsdauern der Galvanometer ist.

Ähnliche Ergebnisse, d. h. kontinuierlichen Abfall gegen Null, wird man erhalten, wenn man für d_1 andere konstante Werte wählt, wenn nur $d_1 > d_{1L}$ ist. Das folgt aus Gl. (8), da dann $d_1 - d_{1L}$ konstant ist, d_1' aber wegen der mit kleiner werdendem a abnehmenden Einstellzeit des Gesamtsystems kleiner wird.

Zusammenfassend kann aus Abb. 6 entnommen werden, daß für $a > 0,55$ die Verkleinerung der Strom- bzw. Spannungsschwankungen nicht sehr bedeutend ist, selbst wenn man $d_1 = 1$ setzt, also erheblich größere Einstellzeiten als für $d_{1\text{opt}}$ in Kauf nimmt. Hier wird also als günstigste Dämpfung die von $d_{1\text{opt}}$ zu gelten haben, da mit ihr die Einstellzeit wesentlich verkürzt werden kann. Für Werte von $a < 0,55$ ist es dagegen günstig, $d_1 = 1$ zu wählen, da hier die Vergrößerung der Einstellzeit keine große Rolle spielt und die Schwankungen stark herabgesetzt werden. Die Wahl von $d_{1\text{opt}}$ für d_1 ist in diesen Fällen wegen des Einflusses der Luftdämpfung weniger empfehlenswert.

5. Zusammenfassung

Durch die Brownsche Bewegung des Primärgalvanometers in einer Relaisanordnung wird in dem Sekundärgalvanometer eine Schwankung erzwungen, deren quadratischer Mittelwert nach Fourierzerlegung der Bewegung des Primärgalvanometers angegeben werden kann. Das Verhältnis der Winkelschwankung des Sekundärgalvanometers $\sqrt{\alpha_2^2}$ zu der des Primärgalvanometers $\sqrt{\alpha_1^2}$ hängt von dem Verhältnis a der Schwingungsdauern beider Galvanometer in der Weise ab, daß $\sqrt{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}}$ bei konstantem a desto kleiner ist, je kleiner d_1

ist. Bei konstantem d_1 nimmt $\sqrt{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}}$ mit kleiner werdendem a ab und geht für kleine a etwa parabelförmig gegen Null. Wählt man für d_1 jene Dämpfung, bei der die kürzeste Einstellzeit des Doppelgalvanometers erreicht wird, so kann die Abnahme von $\sqrt{\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}}$ mit a ohne zu großen Fehler als linear angesehen werden. Bei Variation der Dämpfung durch Änderung der Feldstärke des Galvanometermagneten nimmt das Verhältnis der mittleren Strom- und Spannungsschwankungen $\sqrt{\frac{J_2^2}{J_1^2}} = \sqrt{\frac{V_2^2}{V_1^2}}$ bei kleinen Werten von a nur dann ab, wenn $d_1 > d_{1L}$ ist, insbesondere also für $d_1 = 1$. Wird aber für d_1 eine von a abhängige Funktion gewählt, die mit a gegen Null selbst gegen Null geht, etwa $d_1 = d_{1\text{opt}}$ oder $d_1 = \frac{19}{20}a$, dann kann $\sqrt{\frac{J_2^2}{J_1^2}}$ für kleine Werte von a sehr groß werden, was im wesentlichen dem Einfluß der Luftdämpfung zugeschrieben werden muß.

Faustregel für die Wahl der Dämpfung des Primärgalvanometers einer Relaisanordnung:

Bei $a = \frac{T_1}{T_2} > 0,6$: $d_1 = d_{1\text{opt}}$. (Einstellzeit kürzer, Verkleinerung der Schwankung nur geringfügig).

Bei $a = \frac{T_1}{T_2} < 0,6$: $d_1 = 1$. (Einstellzeit nur wenig erhöht, Schwankungen stark herabgesetzt).

Es sei mir gestattet, Herrn Professor Dr. F. Matossi an dieser Stelle für seine stets wohlwollende Förderung der vorliegenden Arbeit sowie für viele anregende und fördernde Diskussionen meinen Dank auszusprechen.

Graz, II. Physikalisches Institut der Universität, Juli 1942.

(Eingegangen 8. Juli 1942)

**Bemerkung zur Arbeit O. Schrievers:
„Angleichung der elektromagnetischen Reflexions- und
Brechungstheorie an die physikalischen Vorgänge“¹⁾**

Von Felix Lettowsky

(Mit 1 Abbildung)

Verf. dieser Notiz hatte im Februar 1942 eine kritische Stellungnahme zur Schrieverschen Arbeit eingesendet, deren Abdruck sich erübrigte, da Herr Schriever inzwischen das Irrtümliche seines Ansatzes eingesehen hat²⁾.

In seinem Widerruf hält aber Herr Schriever daran fest, daß „das komplexe Brechungsgesetz keine unmittelbare Deutung zuläßt“ und daß deshalb „die physikalische Seite des Problems keinesfalls als hinreichend geklärt gelten“ kann. Deshalb sei kurz auf folgendes hingewiesen:

Daß Wellenfront und Dämpfungsfront bei schiefem Einfall einer ebenen Welle auf die Trennungsfläche im zweiten Medium auseinandergehen, falls z. B. das erste Medium nicht absorbiert, wohl

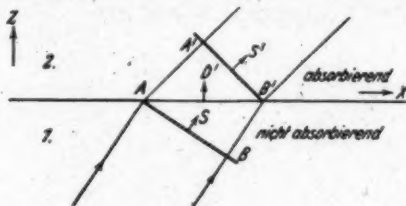


Abb. 1

aber das zweite, ist *physikalisch anschaulich* unmittelbar einzusehen, auch wenn man die Maxwellsche Theorie ganz außer Betracht läßt. Denkt man sich, im Sinne der primitiven Huyghensschen Vorstellung, die Wellenfront als Einhüllende der von der Trennungsfläche ausgehenden Elementarwellen, dann ist klar, daß die Amplituden der gebrochenen Welle in den Punkten A' und B' *verschiedene* Werte erreicht haben müssen, da in A' die Dämpfung dem zurückgelegten Weg $\overline{AA'}$ im absorbierenden Medium entspricht, in B' die

1) O. Schriever, Ann. d. Phys. [5] 40. S. 448. 1941.

2) O. Schriever, Ann. d. Phys. [5] 41. S. 324. 1942.

Dämpfung aber gerade erst beginnt. Die Wellenfront schreitet in Richtung S' , die Dämpfungsfrent dagegen senkrecht zur Trennungsebene in der Richtung D' fort, genau so, wie es das Brechungsgesetz mit komplexem Winkel verlangt, wie man sich an Hand der Ausdrücke

$$A e^{-i[\omega t - k_2(z \cos \alpha + x \sin \alpha)]}$$

mit reellem α auf der einen Seite der Trennungsfläche ($z = 0$) und

$$B e^{-i[\omega t - k_2(z \cos \beta + x \sin \beta)]}$$

mit komplexem β auf der anderen Seite leicht überzeugen kann.

Die Richtigkeit des Brechungsgesetzes mit komplexem Brechungswinkel wurde obendrein von einer großen Zahl von Autoren durch direkte Experimente in jeder Hinsicht bestätigt¹⁾.

1) Vgl. diesbezüglich Geiger-Scheel, Handb. d. Phys. 1928, Bd. XX S. 207 ff. Zffr. 57 über die Veränderlichkeit des Brechungsindex und des Absorptionsindex mit dem Einfallswinkel. U. a. hat bereits D. Shea, (Wied. Ann. 47. S. 177. 1892) durch Versuche über Brechung des Lichtes mit Metallprismen die völlige Übereinstimmung der aus dem komplexen Brechungsgesetz folgenden Abhängigkeit für die Beziehung zwischen Einfallswinkel und Brechungswinkel überzeugend nachgewiesen.

Brünn, Technische Hochschule, 22. Juni 1942.

(Eingegangen 26. Juni 1942)

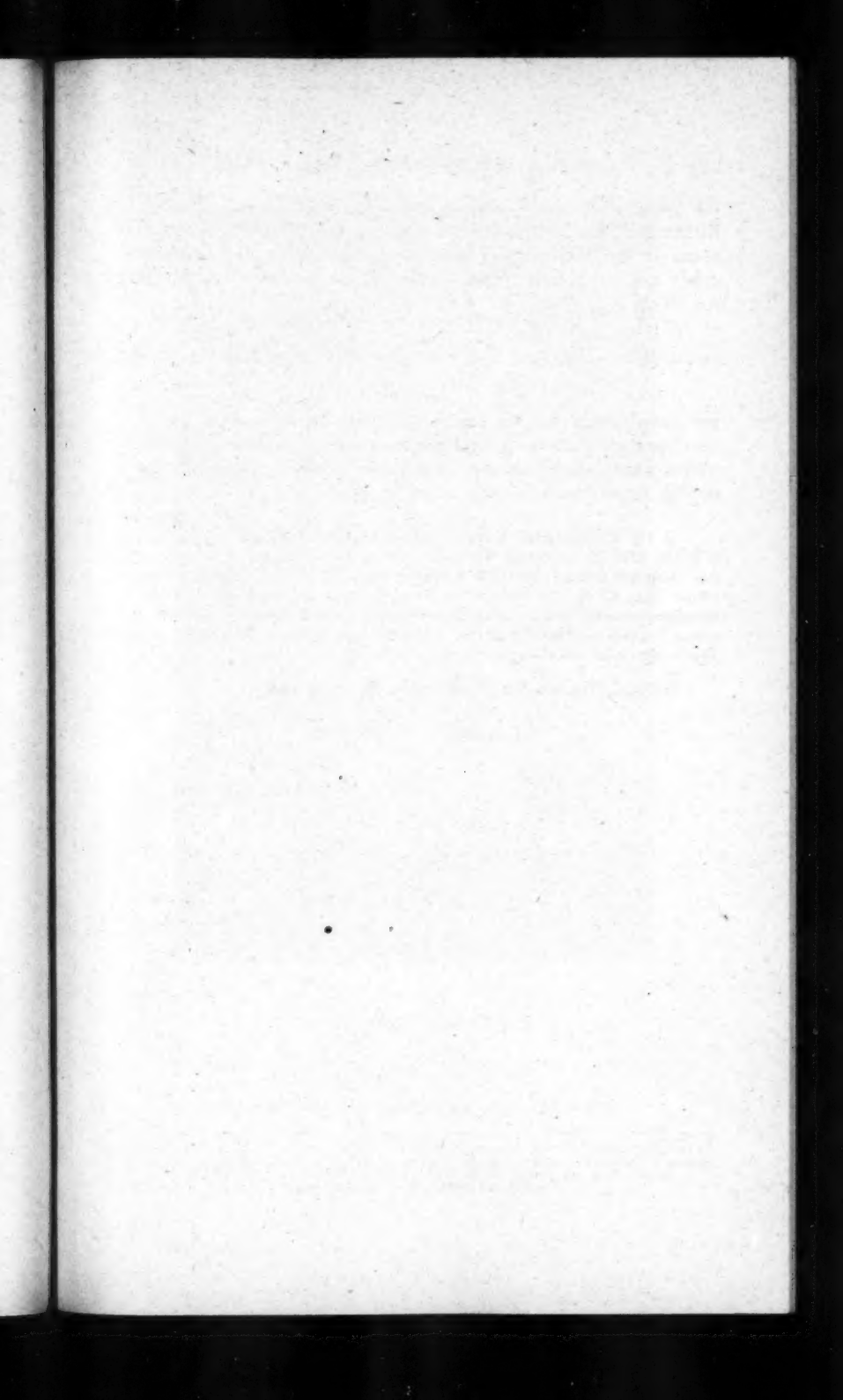




Photo-Polyfoto, München

Walther Heifner

Zum 60. Geburtstage
gewidmet von Freunden und Mitarbeitern

16. Dezember 1942